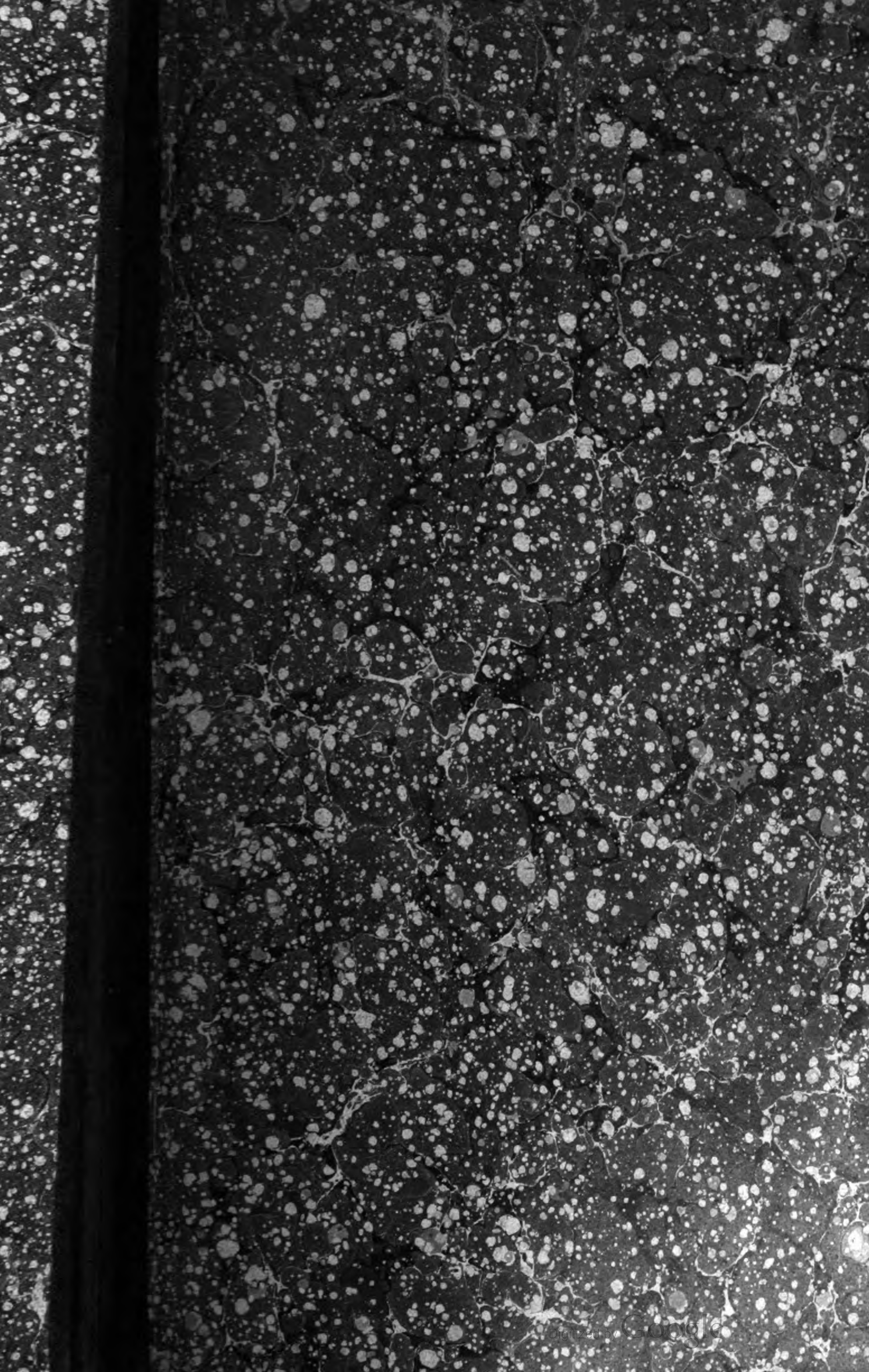
Dissertations

Carl Brodmann, Edward Miles Brown, Erich ...



Untersuchungen

über den

Reibungscoefficienten von Flüssigkeiten.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der hohen philosophischen Facultät der Georg-Augusts-Universität

zu Göttingen

vorgelegt

von

Carl Brodmann

aus Halberstadt.

Göttingen 1891.

Druck der Dieterich'schen Univ.-Buchdruckerei

(W. Fr. Kästner).

Termin der mündlichen Prüfung 20. Juli 1891.

Referent Herr Professor Dr. W. Voigt.

Die innere Reibung von Flüssigkeiten ist bisher wesentlich nach zwei von einander im Prinzip verschiedenen Methoden untersucht worden.

Die älteste und am häufigsten zur Anwendung gebrachte von den beiden ist die Ausflussmethode, nach welcher exacte Bestimmungen zuerst von Poiseuille gegeben sind.

Aus der Flüssigkeitsmenge welche unter gegebenen Umständen in bestimmter Zeit durch eine Röhre strömt, wird hierbei auf die innere Reibung der Flüssigkeit geschlossen.

Geht man von den hydrodynamischen Differentialgleichungen für zähe Flüssigkeiten aus, so gelangt man unter Annahme cylindrischer Gestalt der Ausflussröhre zu Formeln, welche wenigstens für nicht zu kurze und zu weite Röhren den Resultaten der Beobachtung entsprechen.

Andrerseits hat man wiederholt Beobachtungen in der Weise angestellt, dass man entweder Hohlkörper, welche mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt waren, oder Scheiben, welche in dieselbe eintauchten, drehende Schwingungen ausführen liess. Aus dem Decrement der Schwingungen und der Schwingungsdauer suchte man dann zu einem Mass der Zähigkeit zu gelangen.

Hier ist vor Allem die Methode der schwingenden Kugel zu erwähnen, welche theoretisch von Helmholtz, experimentell von Piotrowsky behandelt ist.

Ferner gehören hierher die Methoden der schwingenden Scheiben, nach welchen Coulomb, O. E. Meyer und Andere Untersuchungen angestellt haben.

Bei allen diesen Methoden ist eine strenge Herleitung der Formeln aus den Differentialgleichungen nicht möglich. Entweder werden, wie bei der Helmholtzschen Untersuchung, die Glieder zweiter Ordnung der Differentialgleichungen vernachlässigt, oder man geht überhaupt nicht auf die Differentialgleichungen zurück, sondern baut die Theorie auf Annahmen über den kinematischen Charakter der Bewegung auf.

Trotz aller Vernachlässigungen aber führen diese Entwicklungen auf sehr complicirte Ausdrücke für die Reibungsconstante, und es ist zu bemerken, dass die schliesslichen Resultate weder unter einander, noch mit den Poiseuilleschen Werthen gut übereinstimmen.

So erscheint es denn wünschenswerth, die in Rede stehende Constante nach andern Methoden neu zu bestimmen, um so zur Aufklärung der vorhandenen Widersprüche beizutragen.

Es erscheint ferner eine Untersuchung über die Frage angezeigt, ob denn in der That die Reibungsconstante in den hydrodynamischen Differentialgleichungen als eine wirkliche Constante anzusehen ist, oder ob sie noch von der Geschwindigkeit abhängt.

Eine solche Abhängigkeit ist thatsächlich vermuthet worden.

Die Methoden welche zur Untersuchung angewandt wurden, sind theoretisch nicht neu.

Die erste besteht darin, dass man die zu untersuchende Flüssigkeit in den Zwischenraum zwischen zwei concentrischen Kugeln bringt. Wird dann die äussere derselben in gleichmässige Rotation um ihren verticalen Durchmesser versetzt, so resultirt in Folge

der Zähigkeit ein Drehmoment auf die innere Kugel. Kann man dieses messen, so kann man daraus die Grösse der Reibungsconstante bestimmen.

Die zweite Methode ist experimentell der ersten sehr ähnlich. Bei ihr befindet sich die Flüssigkeit zwischen zwei coaxialen Kreiscylindern, von denen wieder der äussere gleichförmig um seine Axe rotirt, während das auf den innern ausgeübte Moment gemessen wird.

Ueber die bisherige Anwendungen beider ist zu erwähnen, dass die erstere theoretisch im wesentlichen von Kirchhoff in dessen Mechanik[1]) behandelt ist. Experimentell ist sie dann von Elie[2]) versuchsweise zur Bestimmung des Reibungscoefficienten von Wasser angewandt worden. Er glaubte aus seinen Versuchen auf jene erwähnte Inconstanz des fraglichen Coefficienten schliessen zu sollen, hat indessen die Untersuchung nicht zu Ende geführt, weil es ihm nicht gelang, die Rotation der äussern Kugel gleichmässig genug zu machen.

Die zweite Methode ist zuerst von Margules[3]) entwickelt und zu Beobachtungen empfohlen worden. Auch nach ihr sind exacte Messungen bisher nicht angestellt.

Couette[4]) hat eine Reihe von Beobachtungen nach derselben beschrieben, doch ist die ganze Ver-

1) Kirchhoff, Vorlesungen über Mechanik. Vorlesung 26.

2) M. B. Elie, Variation du Coefficient de Viscorité avec la Vitesse. Journal de Physique S. II, T. I, p. 224.

3) Margules, Ueber die Bestimmung des Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus ebenen Bewegungen einer Flüssigkeit. Wiener Berichte II. Abth., B. 83, p. 588.

4) Couette, Journal de Physique S. II, T. IX, p. 414. Annales de Chemie et Phys. S. VI, B. 21, p. 433.

suchsanordnung bei ihm für eine absolute Bestimmung der Reibungsconstante wenig geeignet.

Die Anregung zu der nachstehenden Untersuchung gab mir Herr Professor Voigt zu Göttingen, dem ich an dieser Stelle für sein warmes Interesse und seine freundliche aus den Hülfsmitteln des Göttinger Institutes gewährte Unterstützung meinen besten Dank ausspreche. Der gleiche Dank gebührt Herrn Professor K. Schering zu Darmstadt, in dessen Institut der grössere Theil der Beobachtungen angestellt wurde und welcher mir ebenfalls in der bereitwilligsten Weise die zur Arbeit nothwendigen Hülfsmittel und Apparate zur Verfügung gestellt hat.

Der Kugelapparat ist Eigenthum des Göttinger Institutes der Cylinderapparat dagegen gehört dem Darmstädter Institute an.

Wir wenden uns zunächst zur Entwicklung der später gebrauchten Formeln.

I. Theoretischer Theil.

Es seien

u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit der Flüssigkeit nach den drei Axen.

ε die Dichte der Flüssigkeit.

X, Y, Z die Componenten der äusseren Kräfte, bezogen auf die Masseneinheit.

p der Druck.

k die Reibungsconstante.

Dann gelten folgende Differentialgleichungen:

$$1)\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}+X=u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{k}{\varepsilon}\Delta u \\ -\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}+Y=u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{k}{\varepsilon}\Delta v \\ -\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial p}{\partial z}+Z=u\cdot\frac{\partial w}{\partial x}+v\cdot\frac{\partial w}{\partial y}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{k}{\varepsilon}\Delta w \text{ [1])} \\ \qquad\qquad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \end{array}\right.$$

Hierbei ist einmal eine incompressible Flüssigkeit angenommen und zweitens ist stationärer Zustand vorausgesetzt.

Wir führen nun in die Gleichungen 1) Cylindercoordinaten ein, so zwar, dass wir die z-Axe als mit der Cylinderaxe zusammenfallend annehmen.

1) Δ bezichnet, wie üblich, das Functionszeichen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

So setzen wir

$$2)\left\{\begin{array}{l} \qquad x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta, \quad z = z \\ \text{und ferner} \\ u = r\rho\cos\vartheta - r\sigma\sin\vartheta, \quad v = r\rho\sin\vartheta + r\sigma\cos\vartheta, \quad w = w. \end{array}\right.$$

Für das Folgende beachten wir, dass bei den beiden in Rede stehenden Problemen rings um die als Rotationsaxe gedachte z-Axe aus Symmetrierücksichten in jedem Azimuth der Bewegungszustand der Flüssigkeit als der gleiche anzunehmen ist. Wir werden in Folge dessen von vornherein ρ, σ, w und p als von ϑ unabhängig ansehen können.

Von äusseren Kräften wirkt nur die Schwere. Wir denken uns die z-Axe vertical und zwar von unten nach oben positiv. Dann ist

$$X = Y = 0 \qquad Z = -g.$$

Unter diesen Annahmen führt die Substitution 2) die Gleichungen 1) in folgende Form über:

$$3)\left\{\begin{array}{l} 0 = r^2\rho\dfrac{\partial\sigma}{\partial r} + 2\rho\sigma r + wr\dfrac{\partial\sigma}{\partial z} - \dfrac{k}{\varepsilon}\left[3\dfrac{\partial\sigma}{\partial r} + r\left(\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}\right)\right] \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial r} = r^2\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial r} + r(\rho^2-\sigma^2) + wr\cdot\dfrac{\partial\rho}{\partial z} - \dfrac{k}{\varepsilon}\left[3\dfrac{\partial\rho}{\partial r} + r\left(\dfrac{\partial^2\rho}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2\rho}{\partial z^2}\right)\right] \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial z} - g = r\rho\dfrac{\partial w}{\partial r} + w\cdot\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{k}{\varepsilon}\left[\dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial r} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \\ \qquad 0 = 2\rho + r\cdot\dfrac{\partial\rho}{\partial r} + \dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{array}\right.$$

Die Druckkräfte, welche innerhalb der reibenden Flüssigkeit auf ein bestimmt orientirtes Flächenelement wirken, lassen sich in ganz analoger Form darstellen, wie die entsprechenden Druckkräfte in einem deformirten elastischen festen Körper.

Wir bezeichnen, wie es in der Elasticitätstheorie üblich ist, eine Kraft, welche in der Richtung x auf ein Flächenelement wirkt, dessen Normale parallel der Richtung

y ist, durch X_y und setzen über den Sinn dieser Kraft fest, dass sie die Wirkung der nach der negativen Seite von y liegenden Schichten auf die nach der positiven Seite hin liegenden bezeichnen soll.

Es bestehen dann folgende Relationen:

$$4)\quad \begin{cases} X_x = p - 2k\dfrac{\partial u}{\partial x} & Y_z = -k\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ Y_y = p - 2k\dfrac{\partial v}{\partial y} & Z_x = -k\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ Z_z = p - 2k\dfrac{\partial w}{\partial z} & X_y = -k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right). \end{cases}$$

Dabei gelten, wie in der Elasticitätstheorie, die Beziehungen:

$$5)\quad \begin{cases} X_x = Y_x \quad \text{etc.} \\ X_n = X_x \cos nx + X_y \cos ny + X_z \cos nz \quad \text{etc.} \\ X_n = -X_{-n} \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Nun müssen wir diese Ausdrücke mit unsern neuen Coordinaten in Beziehung setzen. Zu dem Zweck führen wir Kräfte P_r, S_s etc. ein, wobei wir mit P eine in Richtung des Radius vector r wirkende Kraft bezeichnen, mit S dagegen eine Kraft, deren Richtung innerhalb einer Ebene parallel zur xy-Ebene auf r senkrecht steht.

Dabei nehmen wir die positive Richtung von S so, dass dieselbe zu r liegt, wie die positive y-Axe zur positiven x-Axe.

Man hat dann:

$$\begin{aligned} P_r &= X_r \cos\vartheta + Y_r \sin\vartheta \\ &= (X_x \cos\vartheta + X_y \sin\vartheta)\cos\vartheta + (Y_x \cos\vartheta + Y_y \sin\vartheta)\sin\vartheta \\ &= X_x \cos^2\vartheta + 2X_y \cos\vartheta\sin\vartheta + Y_y \sin^2\vartheta \\ &= \left(p - 2k\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cos^2\vartheta - 2k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\vartheta\cos\vartheta \\ &\qquad + \left(p - 2k\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin^2\vartheta. \end{aligned}$$

Setzt man hierin für u und v ihre Werthe aus 2) so folgt:

$$P_r = p - 2k\left(\rho + r \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r}\right).$$

Ebenso ergeben sich die Werthe für die andern Druckkräfte, so dass man endlich folgendes Schema erhält:

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} P_r &= p - 2k\left(\rho + r \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r}\right) & P_s &= -kr \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial r} \\ S_s &= -2k\rho + p & S_z &= -kr \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z} \\ Z_z &= p - 2k \cdot \frac{\partial w}{\partial z} & Z_r &= -kr \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Wir wenden uns nach diesen allgemeinen Ableitungen dem Problem der concentrischen Kugeln zu.

Um die Differentialgleichungen integriren zu können machen wir die Annahme man könne die Glieder, welche zweite Potenzen und Produkte der Variabeln w, ρ und σ und ihrer Differentialquotienten nach den Coordinaten enthalten in den Gleichungen 3) gegen die übrigen vernachlässigen. Dann nehmen die Gleichungen 3) folgende Gestalt an:

$$7)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{k}{\varepsilon}\left[3 \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial r} + r\left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right)\right] \\ -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} &= -\frac{k}{\varepsilon}\left[3 \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} + r\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}\right)\right] \\ -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} - g &= -\frac{k}{\varepsilon}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] \\ 0 &= 2\rho + r \cdot \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Nun nehmen wir an, es sei $\rho = w = 0$, ferner sei σ ausschliesslich eine Funktion des Kugelradius $R = \sqrt{r^2 + z^2}$.

Dann folgt

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = -g, \quad \text{also} \quad \frac{1}{\varepsilon} p = -gz + C.$$

Ferner erhält man für σ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$0 = 4 \cdot \frac{d\sigma}{dR} + R \cdot \frac{d^2\sigma}{dR^2}$$

welche sich sofort integriren lässt und ergiebt

$$\sigma = -\frac{a}{R^3} + b,$$

wo a und b Integrationsconstanten bedeuten.

Demnach haben wir jetzt folgendes Integralsystem für die Gleichungen 7)

$$8) \quad \begin{cases} \rho = 0, \quad w = 0, \quad \sigma = -\frac{a}{R^3} + b, \\ \frac{1}{\varepsilon} p = -gz + C. \end{cases}$$

Bei der Bestimmung der Constanten a und b wollen wir gleich den allgemeinen Fall berücksichtigen, in welchem ein Haften der Flüssigkeit an der Gefässwand nicht voraus gesetzt wird.

Für diesen Fall ist die Grenzbedingung der mathematische Ausdruck für die Forderung, dass auf die der begrenzenden Kugel benachbarte Flüssigkeitsschicht zwei Kräfte wirken müssen, die einander im Gleichgegewicht halten.

Von diesen beiden Kräften ist die eine bedingt durch die Reibung, welche beim Gleiten der Flüssigkeit längs der festen Wand auftritt, während die andere aus der Wirkung der übrigen Flüssigkeit auf die betrachtete Grenzschicht resultirt.

Wir betrachten letztere zuerst. Da wir hatten $\rho = w = 0$, $\sigma = f(R)$ so werden die Gleichungen 6)

$$9)\quad \begin{cases} P_r = p & P_z = -\dfrac{kr^2}{R}\cdot\dfrac{d\sigma}{dR} \\ S_s = p & S_z = -\dfrac{kr\cdot z}{R}\cdot\dfrac{d\sigma}{dR} \\ Z_z = p & Z_r = 0. \end{cases}$$

Die Normale des betrachteten Flüssigkeitselementes fällt zusammen mit dem Kugelradius R.

Demgemäss erhält man für die Componenten der Druckkraft, welche das Element erfährt, folgende Werthe

$$10)\quad \begin{cases} S_R = S_s \cos sR + S_r \cos rR + S_z \cos zR \\ P_R = P_s \cos sR + P_r \cos rR + P_z \cos zR \\ Z_R = Z_s \cos sR + Z_r \cos rR + Z_z \cos zR \end{cases}$$

Aus der Definition der Richtung s ergiebt sich, dass $\cos sR = 0$.

Bezeichnet man ferner mit ψ die „Pol-Distanz" des betrachteten Punktes so ist

$$\cos zR = \cos\psi, \qquad \cos rR = \sin\psi.$$

Setzt man diese Werthe in 10) ein und berücksichtigt Gleichung 9), so erhält man:

$$S_R = -k\frac{r}{R}\left(r\cdot\frac{d\sigma}{dR}\sin\psi + z\frac{d\sigma}{dR}\cdot\cos\psi\right)$$

oder, da

$$\frac{r}{R} = \sin\psi, \qquad \frac{z}{R} = \cos\psi$$

$$S_R = -k\frac{d\sigma}{dR}\cdot R\cdot\sin\psi$$

$$P_R = +p\cdot\sin\psi$$

$$Z_R = +p\cdot\cos\psi.$$

Die durch diese Componenten dargestellte Druckkraft zerlegen wir nach drei andern Richtungen, von denen die eine mit s zusammen fallen soll, während die zweite, die Q heissen möge, dem Kugelradius R parallel sei. Die dritte endlich, T, stehe auf den beiden ersten senkrecht.

Es ist dann:

$$Q = S_R \cos sR + P_R \cos rR + Z_R \cos zR$$
$$T = S_R \cos sT + P_R \cos rT + Z_R \cos zT$$
$$S = S_R.$$

Für die Cosinus gelten folgende Gleichungen

$$\cos sR = \cos sT = 0$$
$$\cos rR = \sin\psi, \qquad \cos zR = \cos\psi$$
$$\cos rT = -\cos\psi, \qquad \cos zT = +\sin\psi.$$

Demnach folgt

$$Q = p, \qquad T = 0, \qquad S = S_R.$$

Die Componente Q ist normal zur starren Wand und wird daher durch deren Gegendruck aufgehoben.

S_R dagegen muss compensirt werden durch die Reibung, welche die Flüssigkeit beim Gleiten an der Wand erfährt.

Von der Kraft, welche aus dieser Reibung hervor geht, nehmen wir an, sie sei direct proportional der relativen Lineargeschwindigkeit der Wand und der Flüssigkeitsschicht, und sei dieser relativen Geschwindigkeit entgegengesetzt gerichtet.

Nennen wir σ_0 die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die äussere Kugel rotirt, so ist $r.\sigma_0$ die lineare Geschwindigkeit des betrachteten Wandelementes.

Da nach unserer Annahme in der Flüssigkeit $\rho = w = 0$ sein soll, so bewegen sich alle Flüssigkeitstheilchen auf Kreisen, deren Ebenen der xy-Ebene parallel sind, und ihre Lineargeschwindigkeit ist gegeben durch $r.\sigma$.

An dem betrachteten Punkt der Begrenzung sei $\sigma = \bar{\sigma}$. Dann ist die Relativgeschwindigkeit von Begrenzungselement und Flüssigkeitstheilchen dort gegeben durch $r(\sigma_0 - \bar{\sigma})$ und wir können die reibende Kraft,

welche das letztere erfährt gleich $\lambda_0 r(\sigma_0 - \bar{\sigma})$ setzen, wo λ_0 einen Proportionalitätsfaktor, den „Coefficienten der äussern Reibung“ bedeutet.

Diese Kraft muss negativ gleich sein der in dieselbe Richtung fallenden Componente des Flüssigkeitsdruckes, den die Grenzschicht erleidet, also nach dem oben über den Sinn von S_R Gesagten, gleich $-S_R$.

Demnach haben wir als Grenzbedingung an der äusseren Kugel:

$$\lambda_0 r(\sigma_0 - \bar{\sigma}) = + k \frac{d\bar{\sigma}}{dR} r, \quad \text{da } r = R . \sin\psi.$$

An der innern, ruhenden Kugel liegen die Verhältnisse ganz ähnlich. Dort ist die reibende Kraft, welche die Grenzschicht von der Kugeloberfläche erfährt, gegeben durch $-\lambda_1 \bar{\bar{\sigma}} r$.

Bei dem Ansetzen der Componente des Flüssigkeitsdruckes ist das Vorzeichen zu beachten.

Die Wirkung, welche ein Element der Grenzschicht erfährt, ist hier nicht gleich S_{+R}, sondern gleich S_{-R}, oder gleich $-S_R$ zu setzen, und diese Wirkung ist ihrerseits negativ gleich $-\lambda_1 \bar{\bar{\sigma}} r$.

Man hat hier also

$$-\lambda_1 r \bar{\bar{\sigma}} = + S_R, \quad \text{oder} \quad \lambda_1 \bar{\bar{\sigma}} = k \frac{d\bar{\bar{\sigma}}}{dR}.$$

Nennt man den Radius der äussern Kugel R_0, den der inneren R_1 und setzt man für $\frac{d\sigma}{dR}$ seinen Werth aus Gleichung 8), so nehmen die beiden Grenzbedingungen folgende Gestalt an:

$$13) \quad \begin{cases} \lambda_0 \left(\sigma_0 + \frac{a}{R_0^3} - b \right) = 3 \frac{ka}{R_0^4} \\ \lambda_1 \left(- \frac{a}{R_1^3} + b \right) = 3 \frac{ka}{R_1^4}. \end{cases}$$

Hieraus folgt:

$$
14)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\sigma_0}{3k\left(\dfrac{\lambda_1}{R_0^4}+\dfrac{\lambda_0}{R_1^4}\right)+\lambda_0\lambda_1\left(\dfrac{1}{R_1^3}-\dfrac{1}{R_0^3}\right)} \\[2ex] b = \dfrac{\lambda_0\sigma_0\left(\dfrac{3k}{R_1^4}+\dfrac{\lambda_1}{R_1^3}\right)}{3k\left(\dfrac{\lambda_1}{R_0^4}+\dfrac{\lambda_0}{R_1^4}\right)+\lambda_0\lambda_1\left(\dfrac{1}{R_1^3}-\dfrac{1}{R_0^3}\right)}. \end{cases}
$$

Nimmt man an, das Verhalten der Flüssigkeit an den beiden Begrenzungen sei das nämliche, so dass man setzen kann:

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda,$$

so geht 14) über in

$$
15)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\lambda\sigma_0}{3k\left(\dfrac{1}{R_0^4}+\dfrac{1}{R_1^4}\right)+\lambda\left(\dfrac{1}{R_1^3}-\dfrac{1}{R_0^3}\right)} \\[2ex] b = \dfrac{\sigma_0\left(\dfrac{3k}{R_1^4}+\dfrac{\lambda}{R_1^3}\right)}{3k\left(\dfrac{1}{R_0^4}+\dfrac{1}{R_1^4}\right)+\lambda\left(\dfrac{1}{R_1^3}-\dfrac{1}{R_0^3}\right)}. \end{cases}
$$

Haftet endlich die Flüssigkeit an den beiden Wandungen, so erhält man die entsprechenden Werthe für a und b, wenn man in 15 setzt $\lambda = \infty$.

Es ergiebt sich dann

$$
16)\qquad a = \frac{\sigma_0}{\dfrac{1}{R_1^3}-\dfrac{1}{R_0^3}} \qquad b = \frac{\sigma_0\cdot\dfrac{1}{R_1^3}}{\dfrac{1}{R_1^3}-\dfrac{1}{R_0^3}}
$$

Der Beobachtung zugänglich ist das Drehmoment, welches die innere Kugel erleidet.

Auf ein Element der Grenzschicht der Flüssigkeit an der innern Kugel wirken, bezogen auf die Flächeneinheit, die Kraftcomponenten $Q = -p$ und $S = -S_R$,

und diese sind gleich den Componenten der Kraft, welche diese Schicht ihrerseits auf das ihr benachbarte Element der Kugelfläche ausübt.

Von den beiden Componenten kann aber nur S ein Drehmoment um die z-Axe ausüben. Nennen wir das benachbarte Element der Kugelfläche do, so ist $-r \, . \, S_R do$ das Elementarmoment und man findet das Gesammtmoment durch Integration jenes Ausdruckes über die ganze Kugelfläche.

Demnach hat man:

$$\mu = \int k \cdot r^2 \cdot \frac{d\sigma}{dR} do = \frac{3ak}{R_1^4} \cdot \int r^2 do.$$

Führt man hierin wieder die „Poldistanz" ψ und die „geographische Länge" φ ein, so hat man

$$do = R^2 \sin \psi d\psi \cdot d\varphi$$
$$r = R \cdot \sin \psi$$

und wenn man diese Werthe in das Integral einführt

$$\mu = 3ka \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \psi d\psi$$

Man kann unbestimmt integriren und findet nach Einführung der Grenzen:

$$\mu = 8a\pi k. \tag{18}$$

Hierin ist für a, je nach dem Verhalten der Flüssigkeit an der Wandung einer der Werthe aus 14) 15) oder 16) zu setzen.

Ehe wir weitergehen seien hier einige Bemerkungen über die früheren Herleitungen der oben entwickelten Formeln eingeschaltet.

Bei Kirchhoff findet man die Formel 18) für μ und die Formeln 16) für a und b.

Der erwähnte Aufsatz von Elie giebt ohne Ableitung eine Formel für unser a (bei ihm mit c bezeichnet)

welche unsrer Formel 14) entspricht), aber von derselben Abweichungen zeigt. Elie's Formel würde in unsrer Bezeichnung lauten

$$a = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3} + \frac{\nu}{R_1^4} - \frac{\nu'}{R_0^4}}$$

Formel 14) bei uns lässt sich dagegen auf die entsprechende Form bringen:

$$a = \frac{\sigma_0}{\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3} + \frac{\nu}{R_1^4} + \frac{\nu'}{R_0^4}}$$

wenn wir in 14) Zähler und Nenner mit $\lambda_0 . \lambda_1$ dividiren und setzen:

$$\frac{3k}{\lambda_1} = \nu \qquad \frac{3k}{\lambda_0} = \nu'.$$

Elie nennt ν und ν' „les coefficients d'adherence des sphères". Beide sind daher wesentlich positiv und es bleibt somit zwischen der Elieschen Formel und unserer in No. 14) eine Differenz im Vorzeichen des einen Gliedes im Nenner.

Die innere Kugel denken wir uns bifilar aufgehängt. Es bezeichne

- m die gesammte am Bifilar hängende Masse, vermindert um die Masse der durch die innere Kugel verdrängten Flüssigkeit
- p, q den oberen und unteren halben Abstand der Bifilardräthe
- l die Länge des Bifilars
- g die Beschleunigung der Schwere
- γ den Torsionscoefficienten des Bifilardrathes, bezogen auf die Längeneinheit
- φ den Ablenkungswinkel der innern Kugel aus ihrer Gleichgewichtslage

dann ist

$$\mu = \frac{m.p.q.g}{l} \sin\varphi + \frac{2\gamma}{l} \cdot \varphi$$

oder, wenn wir den Ablenkungswinkel so klein nehmen, dass wir $\sin\varphi = \varphi$ setzen können:

19) $$\mu = \left(\frac{m.pqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right) \cdot \varphi.$$

Nehmen wir für a seinen Werth aus Formel 16) so erhalten wir unter Berücksichtigung von 18) folgende Gleichung:

19b) $$\left(\frac{mpqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right)\varphi = \frac{8\sigma_0 \pi k}{\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3}}$$

und demnach

20) $$k = \frac{1}{8\pi.\sigma_0}\left\{\left(\frac{mpqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right)\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3}\right)\right\}\varphi.$$

Die Grössen rechts sind sämmtlich der Beobachtung zugänglich und man hat sonach die Mittel an der Hand, k zu bestimmen.

Auch in dem Falle, dass Gleitung an der Wand stattfindet, kann man in dieser Weise Formeln für k und λ aufstellen, sobald Beobachtungen mit Kugeln von verschiedenem Radius vorliegen.

Aus später erkennbaren Gründen soll hierauf indess nicht weiter eingegangen werden.

Um das entsprechende Problem für coaxiale Kreiscylinder zu behandeln, gehen wir auf die strengen Differentialgleichungen 3) zurück.

Wir behalten jetzt die Glieder zweiter Ordnung bei und integriren durch folgende Annahmen:

1. $\rho = 0$. 2. $w = 0$,

dann folgt aus der ersten der Gleichungen 3)

$$3. \frac{\partial\sigma}{\partial r} + r\left(\frac{\partial^2\sigma}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\sigma}{\partial z^2}\right) = 0$$

ferner aus der zweiten und dritten

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \varepsilon r \,.\, \sigma^2 \qquad \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\delta z} = -gg.$$

Die beiden letzten Gleichungen zeigen, dass wir σ als von z unabhängig anzunehmen haben. So erhalten wir für σ die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$3. \frac{d\sigma}{dr} + r \cdot \frac{d^2\sigma}{dr^2} = 0.$$

Diese giebt integrirt:

$$\sigma = -\frac{a}{r^2} + b.$$

Demnach wird

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \varepsilon r\left(b - \frac{a}{r^2}\right)^2.$$

In dieser Gleichung hängt die rechte Seite nur von r ab. Integriren wir nach r, so finden wir

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot p = -\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + 2ab \log\text{nat}\, r + \tfrac{1}{2} b^2 r^2 + f(z)$$

Da $\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z} = -g$ ist, so folgt

$$f(z) = -gz + C,$$

so dass

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot p = -\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + 2ab \log\text{nat}\, r + \tfrac{1}{2} b^2 r^2 - gz + C.$$

Demnach erhalten wir schliesslich folgendes Gleichungssystem:

$$21)\quad \left\{\begin{aligned} \rho &= 0 \\ w &= 0 \\ \sigma &= -\frac{a}{r^2} + b \\ \frac{1}{\varepsilon} p &= -\tfrac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} + 2ab \log\text{nat}\, r + \tfrac{1}{2} b^2 r^2 - gz + C. \end{aligned}\right.$$

Um die Grenzbedingungen einzuführen denken wir uns zunächst die beiden Cylinder als längs ihrer Axe unbegrenzt.

Wir haben dann nur die Verhältnisse an den beiden Mantelflächen zu untersuchen.

Die Normale eines Grenzelementes fällt hier zusammen mit dem Radius Vector r. Es sind daher die Componenten des Flüssigkeitsdruckes auf ein Element der Grenzschicht, bezogen auf die Flächeneinheit gegeben durch S_r, P_r, Z_r.

Setzen wir die Werthe aus 21) in 6) ein, so folgt

$$
\begin{aligned}
P_r &= p \qquad & P_s &= -kr \cdot \frac{d\sigma}{dr} = -\frac{2ka}{r^2} \\
S_s &= p \qquad & S_z &= 0 \\
Z_z &= p \qquad & Z_r &= 0.
\end{aligned}
$$

Z_r ist gleich Null, $P_r = p$ ist normal zur starren Wand und wird durch deren Gegendruck aufgehoben.

$S_r = P_s = -\frac{2ka}{r^2}$ muss durch die Reibung zwischen Flüssigkeit und Wand compensirt werden.

Nennen wir den Radius des äusseren Cylinders r_0, so erhalten wir nach dem Gesagten ähnlich wie bei den Kugeln, folgende Bedingung

$$\frac{2ak}{r_0^2} = \lambda_0 r_0 \left(\sigma_0 + \frac{a}{r_0^2} - b\right).$$

Hierbei bezeichnet σ_0 wieder die Winkelgeschwindigkeit, mit welcher der äussere Cylinder rotirt.

An der Wand des innern Cylinders erhält man, wenn r_1 den Radius desselben bezeichnet

$$\frac{2ak}{r_1^2} = r_1 \lambda_1 \left(b - \frac{a}{r_1^2}\right).$$

Aus den beiden Grenzbedingungen kann man a und b berechnen und erhält

$$22)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\lambda_0\lambda_1\sigma_0}{2k\left(\dfrac{\lambda_1}{r_0^3}+\dfrac{\lambda_0}{r_1^3}\right)+\lambda_0\lambda_1\left(\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_0^2}\right)} \\ b = \dfrac{\lambda_0\sigma_0\left(\dfrac{2k}{r_1^3}+\dfrac{\lambda_1}{r_1^2}\right)}{2k\left(\dfrac{\lambda_1}{r_0^3}+\dfrac{\lambda_0}{r_1^3}\right)+\lambda_0\lambda_1\left(\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_0^2}\right)}. \end{cases}$$

Nimmt man wieder $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda$, so folgt hieraus:

$$23)\quad \begin{cases} a = \dfrac{\lambda\sigma_0}{2k\left(\dfrac{1}{r_0^3}+\dfrac{1}{r_1^3}\right)+\lambda\left(\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_0^2}\right)} \\ b = \dfrac{\sigma_0\left(\dfrac{2k}{r_1^3}+\dfrac{\lambda}{r_1^2}\right)}{2k\left(\dfrac{1}{r_0^3}+\dfrac{1}{r_1^3}\right)+\lambda\left(\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_0^2}\right)} \end{cases}$$

Und wenn man endlich ein Haften der Flüssigkeit an der Wand voraussetzt, so hat man $\lambda = \infty$ zu setzen und findet:

$$24)\qquad a = \frac{\sigma_0}{\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_0^2}} \qquad b = \frac{\dfrac{\sigma_0}{r_1^2}}{\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_0^2}}.$$

Demnach lässt sich bei zwei unendlich langen Cylindern die gegebene Lösung in der That den Grenzbedingungen anpassen.

Anders verhält es sich, sobald man begrenzte Cylinder annimmt.

Der innere Cylinder möge aus der Flüssigkeit hervorragen, so dass die Grenzflächen, welche noch zu berücksichtigen sein würden, einmal die freie Oberfläche der Flüssigkeit und zweitens die Bodenfläche des innern und die des äussern Cylinders sind.

Nimmt man an, es sei die Reibung zwischen Luft

und Flüssigkeit gegen die Zähigkeit der letzteren zu vernachlässigen, so wird die Oberfläche der Flüssigkeit eine Form annehmen die gegeben ist durch die Bedingung, dass längs derselben der Druck p constant sei. Im Uebrigen wird an dieser Grenze keine weitere Bedingung zu berücksichtigen sein.

Anders verhält es sich, wenn wir die Verhältnisse an der Bodenfläche des innern und äussern Cylinders in Betracht ziehen. Dann kann eine Lösung, welche, wie die unsrige, σ als von z unabhängig annimmt, offenbar die Erscheinungen in keiner Weise mehr streng darstellen.

Indessen können wir die für den Fall unendlich langer Cylinder entwickelten Formeln auf unsere Versuche anwenden sobald wir die Annahme zulassen, dass die Störung der Bewegung, die von den Bodenflächen herrührt, bald unmerklich wird, wenn man sich über den Boden des innern Cylinders erhebt.

Das Genauere hierüber soll gleich entwickelt werden. Wir wenden uns nur vorher noch zur Berechnung des Drehmomentes, welches, unendlich lange Cylinder vorausgesetzt, ein zwischen zwei um dz von einander abstehenden horizontalen Ebenen eingeschlossenes Stück der Mantelfläche des innern Cylinders während der Bewegung erfährt.

Ein Element dieser Mantelfläche hat den Werth

$$do = r_1 d\vartheta . dz.$$

Von den Componenten der auf dieses Element wirkenden Druckkraft ist Z_r gleich Null. P_r liefert kein Drehmoment um die z-Axe.

Dagegen ist die Componente S_r zu berücksichtigen. Sie liefert ein Elementarmoment

$$d\mu = -r_1^2 S_r d\vartheta dz = +2ak d\vartheta . dz.$$

Integrirt man über ϑ von 0 bis 2π, so erhält man das gesammte auf die Mantelfläche des unendlich niedrigen Cylinders ausgeübte Moment in der Gestalt

$$\mu = 4\pi a k dz.$$

Dieses Resultat überträgt sich sofort auf den Fall eines Cylinderabschnittes von der endlichen Höhe h, so dass man hat

$$\mu = 4\pi a k h. \tag{25}$$

Für a sind hierin, je nach den Umständen die Werthe aus 23) 24) oder 22) einzuführen.

Wir wollen nun zeigen, wie man unter der oben ausgesprochenen Annahme den Einfluss der Bodenflächen durch entsprechende Combination von Beobachtungen eliminiren kann.

Die Höhen h seien im Folgenden von der Bodenfläche des innern Cylinders aus gerechnet, und wir nehmen für a seinen einfachsten Werth aus Formel 24).

Ist dann h_0 eine (unbekannte) Höhe derart, dass in allen Schichten, für welche $h > h_0$ ist, der Einfluss der Bodenflächen verschwindet und reicht die Flüssigkeit hinauf bis zur Höhe h_1, so hat man:

$$\mu_1 = \frac{4\pi (h_1 - h_0)\,\sigma_0 . k}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}} + f(\sigma_0).$$

Hierin bezeichnet $f(\sigma_0)$ den Theil des gesammten beobachteten Momentes μ_1, der herrührt einmal von der Reibung an der Bodenfläche des innern Cylinders und zweitens von der Reibung an der Mantelfläche in Punkten, für welche $h < h_0$, in welchen also nach dem Gesagten noch Störung der Bewegung durch den Einfluss der Bodenflächen bemerkbar sein mag.

$f(\sigma_0)$ hängt in unbekannter Weise von σ_0 und aus-

serdem natürlich von dem Abstand der beiden Bodenflächen und den Radien der Cylinder ab.

Nun beobachten wir ferner bei der nämlichen Drehgeschwindigkeit des äussern Cylinders und bei der Wasserhöhe h_2 das Drehmoment μ_2. Dabei sei auch der Abstand der beiden Bodenflächen der alte geblieben, so dass von den Argumenten der Function f sich keines geändert hat. Dann hat man

$$\mu_2 = \frac{4\pi(h_2 - h_0)\sigma_0 k}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}} + f(\sigma_0).$$

Bildet man die Differenz beider Gleichungen, so erhält man

$$\mu_1 - \mu_2 = \frac{4\pi(h_1 - h_2)\sigma_0 k}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}} \tag{26}$$

Der innere Cylinder sei wieder bifilar aufgehängt. Bezeichnet m jetzt die ganze am Bifilar hängende Masse ohne Abzug, so findet man unter Beibehaltung der sonstigen oben erklärten Bezeichnungen und der Voraussetzung über genügende Kleinheit des Winkels φ

$$\mu_1 = \left[(m - h_1 r_1^2 \pi\varepsilon)\frac{pqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right]\varphi_1$$

$$\mu_2 = \left[(m - h_2 r_1^2 \pi\varepsilon)\frac{pqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right]\varphi_2.$$

Ersetzen wir ferner noch σ_0 durch die Dauer t einer Umdrehung: $\sigma_0 = \frac{2\pi}{t}$,

so folgt aus 26)

$$\left(\frac{mpqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right)(\varphi_1 - \varphi_2) - r^2\frac{\pi\varepsilon pqg}{l}(h_1\varphi_1 - h_2\varphi_2)$$

$$= \frac{8\pi^2(h_1 - h_2)k}{\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)t}$$

oder

$$k = \left\{ \left(\frac{mpqg}{l} + \frac{2\gamma}{l} \right) (\varphi_1 - \varphi_2) - r_1^2 \frac{\pi \varepsilon pqg}{l} (h_1 \varphi_1 - h_2 \varphi_2) \right\} \cdot \mathrm{T}., \text{ wo}$$

27)

$$\mathrm{T} = \frac{t\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)}{8\pi^2 (h_1 - h_2)}$$

Die Grössen auf der rechten Seite dieser Gleichung sind sämmtlich der directen Beobachtung zugänglich.

Es dürfte hier noch die Frage zu beantworten sein, ob nicht der oben erwähnte Umstand, dass die Grenze des Wassers gegen Luft keine Ebene sondern eine durch die Gleichung $p = \mathrm{Const.}$ gegebene krumme Fläche darstellt, in unserer Formel Berücksichtigung verdient.

Die Folge dieses Umstandes wird sein, dass sich das Wasser am Mantel des innern Cylinders um einen geringen Betrag senkt, am Mantel des äussern dagegen etwas hebt, und weil, wie in der Arbeit gezeigt wird, die Höhen bei ruhender Flüssigkeit bestimmt werden, so wird ihr wahrer Werth, insofern er bei der Bestimmung des Drehmomentes in Betracht kommt, etwas kleiner sein, als der gemessene.

Da indess immer Beobachtungen, bei denen σ das gleiche war, in unserer Formel combinirt sind, so fällt aus der dort auftretenden Differenz $h_1 - h_2$ der erwähnte Fehler heraus, während derselbe andererseits viel zu gering ist, als dass er in den an und für sich schon kleineren Gliedern, welche die absoluten Wasserhöhen enthalten, irgendwie in Betracht käme.

Gleichzeitig mag hier noch darauf hingewiesen werden, dass, falls in der That in der Wasseroberfläche die Zähigkeit eine grössere sein sollte als in der Flüssigkeit selbst, wie dies behauptet worden ist, unsere Methode diesen störenden Einfluss ebenfalls eliminirt.

Ein solcher Einfluss würde sich einfach zu $f(\sigma_0)$ addiren und mit dieser Funktion eliminirt werden.

Wir wollen noch die entsprechenden Formeln für den Fall ableiten, dass a nach der Gleichung 23) zu bestimmen ist.

Dabei empfiehlt es sich mit Rücksicht auf die spätere Anwendung in folgender Weise vorzugehen: Wir denken uns aus den Beobachtungsdaten die Grösse k nach Formel 27) berechnet. Ist dann die dieser Formel zu Grunde liegende Annahme eines Haftens der Flüssigkeit an der Wand nicht stichhaltig, so wird sich dies darin äussern, dass der Werth für k keine Constante im eigentlichen Sinne ist, dass derselbe vielmehr variirt, sobald die Radien der Cylinder, mit denen man beobachtet, anders gewählt werden.

Wir nehmen an, man habe mit zwei verschiedenen innern Cylindern beobachtet.

Nennen wir k_1 und k_2 die Werthe welche man nach Formel 17 aus diesen Versuchen berechnet hat, ferner $\mathfrak{k}$ die eigentliche Reibungsconstante und setzen wir

$\mu_1 - \mu_2$ für den ersten Cylinder $= \nu_1$

$\mu_1 - \mu_2$ für den zweiten Cylinder $= \nu_2$

$h_1 - h_2$ für den ersten $= H_1$

$h_1 - h_2$ für den zweiten $= H_2$

$$\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} = d_{10}^2 \qquad \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_0^2} = d_{20}^2$$

$$\frac{1}{r_1^3} + \frac{1}{r_0^3} = d_{10}^3 \qquad \frac{1}{r_2^3} + \frac{1}{r_0^3} = d_{20}^3$$

so erhalten wir

$$\nu_1 = \frac{8\pi^2 H_1 k_1}{d_{10}^2 t} = \frac{8\pi^2 H_1 \mathfrak{k} . \lambda}{(2\mathfrak{k} . d_{10}^3 + \lambda d_{10}^2) t}$$

$$\nu_2 = \frac{8\pi^2 H_2 k_2}{d_{20}^2 t} = \frac{8\pi^2 H_2 \mathfrak{k} . \lambda}{(2\mathfrak{k} . d_{20}^3 + \lambda . d_{2}^{20}) t}.$$

Hierbei ist angenommen, dass an den Oberflächen der beiden verschiedenen innern Cylinder λ den gleichen Werth hat.

Aus den obigen Gleichungen folgt:

$$k_1 = \frac{d_{10}^2 \mathfrak{k} . \lambda}{2\mathfrak{k} d_{10}^3 + \lambda d_{10}^2} \qquad k_2 = \frac{d_{20}^2 \mathfrak{k} . \lambda}{2\mathfrak{k} d_{20}^3 + \lambda d_{20}^2}.$$

Dies giebt für $\mathfrak{k}$ und $\frac{\mathfrak{k}}{\lambda}$ zwei lineare Gleichungen, aus denen sich berechnet:

$$\text{28)} \qquad \mathfrak{k} = \frac{k_1 k_2 (d_{10}^2 d_{20}^3 - d_{20}^2 d_{10}^3)}{d_{20}^3 d_{10}^2 k_2 - d_{10}^3 d_{20}^2 k_1}$$

$$\text{29)} \qquad \lambda = \frac{2 k_1 k_2 (d_{10}^2 d_{20}^3 - d_{10}^3 d_{20}^2)}{(k_1 - k_2) d_{10}^2 d_{20}^2}.$$

Ueber frühere Behandlungen des Cylinderproblems ist anzuführen, dass Margules in der oben citirten Arbeit die Theorie bis zu unsern Gleichungen 23) 24) 25) entwickelt hat und dass seine Resultate mit den oben angegebenen völlig übereinstimmen.

Einer andern Abhandlung müssen wir hier noch gedenken, in welcher sowohl unser Kugel- als Cylinderproblem untersucht sind.

Es ist dies ein Aufsatz von K. Wagner[1]) und der Verfasser behandelt in ihm die beiden erwähnten Probleme unter der Voraussetzung eines Haftens der Flüssigkeit an der Wand und einer gleichzeitigen gegebenen Rotation der äussern und der innern Begrenzung, wobei die Resultate von den unsern in nichts Wesentlichem abweichen.

Dagegen ist in dieser Arbeit der Unterschied in

1) K. Wagner: Ueber die Bewegung einer incompressiblen Flüssigkeit, welche begrenzt wird von zwei in gegebener Rotation befindlichen Flächen. Dissertation Tübingen. Stuttgart 1888.

der Bedeutung der beiden gefundenen Lösungen völlig verwischt, den es mir wichtig scheint, ganz besonders zu betonen.

Wir haben oben gesehen, dass die Integration der Differentialgleichungen bei den Kugeln erst durch die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung möglich wurde, während bei den unendlich langen Cylindern eine solche Vernachlässigung nicht nothwendig ist.

In der citirten Arbeit wird nun die zur Integration nothwendige Vereinfachung der Differentialgleichungen bei den Kugeln dadurch erreicht, dass ohne Erklärung oder Begründung die partielle Derivirte nach der Zeit an Stelle der totalen gesetzt wird. So gewinnt es den Anschein, als seien die schliesslichen Formeln für Kugel und Cylinder völlig gleichberechtigt und exact.

Es ist dies nicht der Fall. Eine exacte Lösung des Kugelproblems ist bisher noch nicht gegeben.

Auf zwei andere Arbeiten, welche sich experimentell mit dem Cylinderproblem beschäftigen, werden wir nach Beschreibung der eigenen Versuche zurückkommen.

II. Experimenteller Theil.

I. Allgemeine Anordnung der Beobachtungen. Hülfsbestimmungen.

Um die im Vorstehenden theoretisch behandelten Methoden anwenden zu können, ist es vor allen Dingen nothwendig, einen Motor zu finden, mittels dessen man das äussere Gefäss in gleichmässige Rotation versetzen kann.

Bei den hier zu beschreibenden Versuchen kam, nachdem man zuerst vergeblich versucht hatte, mit Hülfe eines kleinen Wassermotors das gewünschte Ziel zu erreichen, ein phonisches Rad nach De la Cour[1]) zur Anwendung.

Dasselbe ist ein eisernes Zahnrad, welches sich dicht vor den Schenkeln eines hufeisenförmigen Elektromagneten dreht.

Durch die Wicklung des letzteren wird ein intermittirender Strom geleitet, und zwar besorgt eine Stimmgabel durch ihre Schwingungen die Oeffnung und Schliessung eines in den Radstrom eingeschalteten Quecksilbercontactes. Die Stimmgabel ihrerseits wird durch einen Elektromagneten, dessen Strom sie selbst schliesst und öffnet, in Gang gehalten.

---

1) De la Cour: La roue phonique.

Dreht sich dann das Rad so schnell, dass bei einem jeden Stromschluss ein Zahn desselben vor den Polen des Magneten sich befindet, so bleibt dasselbe im Gang und rotirt mit völlig gleichmässiger Geschwindigkeit.

Bei den Versuchen wurde die Stimmgabel durch zwei nebeneinandergeschaltete Grovesche Elemente getrieben, während fünf solche Elemente, hintereinander geschaltet, den Radstrom lieferten.

Um an dem Quecksilbercontact des letzteren den starken Oeffnungsfunken zu vermeiden, wurde in entsprechender Weise die Leitung, die zum Rade führte, mit den Platten eines grossen Condensators in Verbindung gesetzt. Ausserdem waren der Quecksilbercontact des Radstromes sowohl, als des Gabelstromes mit Alkohol bedeckt.

Um die Drehgeschwindigkeit des äussern Gefässes variiren zu können trieb man mit dem phonischen Rad zunächst eine hölzerne Rolle, welche Schnurläufe von verschiedenem Radius trug. Diese Rolle ihrerseits trieb dann das Gefäss. Dabei geschah die Uebertragung der Bewegung entweder durch Schnüre, oder durch eine dünne Kette.

Die Dauer einer Umdrehung des Gefässes wurde direct an dem letzteren selbst gemessen.

Eine Berechnung derselben aus der Schwingungszahl der Gabel, der Anzahl der Radzähne und den Durchmessern der angewandten Rollen schien sich nicht zu empfehlen, da es sich herausstellte, dass die zu messende Grösse ziemlich bedeutend von der Art und der Spannung der treibenden Schnüre abhängig war.

Diese directe Messung geschah mit Hülfe eines als Chronograph fungirenden Morseapparates. Der Strom des letztern wurde von Sekunde zu Sekunde durch das Pendel einer Wanduhr geschlossen, und er schloss sich

ferner, sobald das rotirende Gefäss eine bestimmte Stellung erreichte, indem dann ein mit dem Gefäss fest verbundener Platindrath durch eine Quecksilberkuppe streifte.

Der Chronograph wurde etwa eine Minute lang in Gang gehalten, und während dieser Zeit der Ablenkungswinkel des innern Körpers gemessen. Dann wurde mittels eines Glasmassstabes die Lage zweier zu Anfang und zu Ende des erhaltenen Papierstreifens gelegener Marken zu den benachbarten Sekundenmarken bestimmt und die dazwischen liegenden Sekunden und Umdrehungen ausgezählt.

Die Messung des Ablenkungswinkel des innern Körpers geschah durch Ablesung mit Spiegel und Skala. Das phonische Rad gewährte hier noch den Vortheil, dass man den Sinn der Rotation des äussern Gefässes leicht umkehren konnte, ohne ihre Geschwindigkeit zu ändern. So konnte man das innere Gefäss nach beiden Seiten ablenken und wurde unabhängig von seiner Ruhelage.

Der innere Körper war in allen Fällen bifilar aufgehängt. Bei den Kugeln war es wichtig, dem ganzen Bifilar kleine Hebungen und Senkungen ertheilen zu können und in allen Fällen war es wünschenswerth, das untere Ende des Bifilars gegen verticale Verschiebungen in Folge von Temperaturänderungen möglichst zu schützen.

Um beide Zwecke zu erreichen war das obere Bifilarende in folgender Weise befestigt: die Messingbacken, welche die Dräthe hielten, sassen an dem einen Ende eines um eine horizontale Axe drehbaren Hebels. Das dem Bifilar abgewandte Ende des Hebels war mit einem Gewicht beschwert, dessen Drehmoment grösser war als das der grössten an das Bifilar zu hängenden

Masse. Von dem Ende des Hebels, an welchem das Bifilar hing, führte ein Draht nach unten, wo er mit Hülfe einer Schraube angezogen werden konnte. Die Länge dieses Drahtes war so gewählt, dass der Hebel etwa horizontal stand. Anziehen oder Nachlassen der Schraube gab dann Senkung oder Hebung des Bifilars [1]).

Ausserdem war, wenn der erwähnte Draht aus demselben Material bestand, wie die Bifilardräthe, eine Höhenänderung des untern Bifilarendes in Folge von Temperaturschwankungen fast ganz ausgeschlossen. Denn wenn das Bifilar sich verlängerte, so verlängerte sich auch der Draht und da die Länge beider nahe gleich war, so musste das untere Ende des Bifilars fast genau in der alten Höhe verharren.

Zur Anwendung kamen in allen Fällen Messingdrähte, deren Durchmesser je nach der Schwere der Belastung von 0,1 mm bis 0,2 mm variirte.

Das Drehmoment des Bifilars wurde zuerst durch directe Messung des Fadenabstandes oben und unten, der Länge und des Torsionscoefficienten des Drahtes bestimmt.

Indessen zeigte sich namentlich die Bestimmung des Fadenabstandes als zu schwierig und ungenau und es wurde desshalb später die gesuchte Grösse durch die Beobachtung von Schwingungsdauern in folgender Weise gemessen.

An das Bifilar wurde das Gestell eines zur Bestimmung der absoluten Horizontalintensität des Erdmagnetismus gebrauchten Magnetometer angehängt.

Dasselbe trug in der üblichen Weise Zapfen zum

---

1) Die hier beschriebene Art der Befestigung des obern Bifilarendes ist einer im Königsberger physikalischen Institut gebräuchlichen nachgebildet, deren Kenntniss ich einer mündlichen Mittheilung des Herrn Professor W. Voigt zu Göttingen verdanke.

Aufsetzen von Zusatzgewichten, und zwar waren zwei Paar solcher Zapfen vorhanden. Der Magnet war durch einen Kupferstab ersetzt.

Wir nennen

m_0 die Gesammtmasse des Gestelles und der Suspension aber ohne Zusatzgewichte

m die Masse eines dieser Gewichte (beide waren merklich gleich schwer)

M_0 das Trägheitsmoment des Gestelles, ohne die Gewichte, bezogen auf die verticale Drehaxe des Bifilars

a_2 den Abstand eines der beiden innern Zapfen von jener Axe

a_3 den Abstand eines der beiden äussern Zapfen von derselben Axe

r_1 Radius der Grundfläche eines der cylindrischen Gewichte

r_2 den halben Durchmesser eines Zapfens

T_1 die doppelte Schwingungsdauer des Gestelles allein

T_2 die entsprechende Dauer, wenn die Gewichte auf den innern Zapfen sassen

T_3 dieselbe Dauer, wenn die Gewichte auf den äussern Zapfen sassen.

Im übrigen behalten wir die pag. 15 erklärten Bezeichnungen bei.

Dann haben wir folgende drei Gleichungen:

$$\frac{T_1^2}{4\pi^2} = \frac{M_0 l}{m_0 pqg + 2\gamma}$$

$$\frac{T_2^2}{4\pi^2} = \frac{(M_0 + 2M + 2a_2^2 m)\, l}{(m_0 + 2m) pqg + 2\gamma}$$

$$\frac{T_3^2}{4\pi^2} = \frac{(M_0 + 2M + 2a_3^2 m)\, l}{(m_0 + 2m) pqg + 2\gamma}.$$

Setzt man $p.q.g = x$, so findet man hieraus:

$$x = \frac{(2M + 2a_2^2 m)\,l + 2\gamma(T_1^2 - T_2^2)\cdot\frac{1}{4\pi^2}}{(m_0 + 2m)\,T_2^2 - m_0\,T_1^2}\cdot 4\pi^2$$

oder

$$x = \frac{(2M + 2a_3^2 m)\,l + 2\gamma(T_1^2 - T_3^2)\cdot\frac{1}{4\pi^2}}{(m_0 + 2m)\,T_3^2 - m_0\,T_1^2}\cdot 4\pi^2$$

oder endlich

$$x = \frac{l}{m_0 + 2m}\left(\frac{8\pi^2 m\,(a_3^2 - a_2^2)}{T_3^2 - T_2^2} - \frac{2\gamma}{l}\right).$$

Die Schwingungsdauer wurde nach der Gauss'schen Methode bestimmt und auf unendlich kleine Bögen reducirt. Während der Beobachtung war der untere Theil des Bifilars durch einen Schutzkasten vor Luftströmungen geschützt.

Es sei hier ein Beispiel einer solchen Bestimmung angeführt.

Es fand sich

$T_1 = 7,3685$ $T_2 = 7,3105$ $T_3 = 9,5658$

$l = 176,3$ cm $m_0 = 197,591$ gr

$2m = 78,122$ gr $r_1 = 1,000$ cm $r_2 = 0,135$ cm

$a_2 = 2,542$ cm $a_3 = 5,028$ cm $\log\gamma = 3,69072$.

Wie γ bestimmt wurde soll noch unten angegeben werden.

Aus den Dimensionen der Gewichte, welche Hohlcylinder darstellten, findet sich

$$M = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2).$$

Setzt man obige Werthe hierin ein, so findet man

$$\log 2M = 1,59949.$$

Führt man damit die Rechnung nach den beiden ersten von uns gegebenen Formeln für x durch, so findet sich

$\log \frac{x}{l} = \log \frac{p \cdot q \cdot g}{l} = 0{,}73022$ nach der ersten,

$= 0{,}72960$ nach der zweiten Formel.

Nimmt man $\log g = 2{,}99178$ und setzt $p = q$, so ergiebt sich:

$$p = 1{,}0726 \qquad p' = 1{,}0719$$

so dass beide Werthe sich nur um 0,0007 cm unterscheiden.

Wir holen nun die Angaben über die Art nach, in welcher γ bestimmt wurde.

Eine flache cylindrische Messingscheibe wurde unifilar an einem Stück desselben Drathes aufgehängt, aus dem die Bifilardräthe genommen waren.

Um den Drath passend an der Scheibe befestigen zu können, war dieselbe in der Mitte mit einer konischen Durchbohrung versehen, in welche ein Messingstöpsel passte. Dieser war in zwei congruente Hälften zerschnitten.

Das untere Ende des Drathes wurde zwischen die beiden Hälften gelegt und dieselben wurden dann so in die Bohrung hineingedrückt, dass die schmalere Seite des Konus nach oben kam.

So konnte man leicht den Drath in die Axe der cylindrischen Scheibe bringen.

Nennen wir

T die doppelte Schwingungsdauer der so aufgehängten Scheibe um ihre Axe

M das Trägheitsmoment der Scheibe, bezogen auf diese Axe

l die Länge des Drathes zwischen der obern Klemme, die ihn hält, und der Scheibe,

so hat man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Ml}{\gamma}}, \text{ oder } \gamma = \frac{4\pi^2 Ml}{T^2}.$$

Nennen wir r den Radius der Scheibe, m ihre Masse, so wäre $M = \frac{mr^2}{2}$, wenn die Scheibe einfach cylindrisch wäre. Es musste aber an diesem Werth in unserm Falle noch eine kleine Correction angebracht werden, weil der erwähnte Stöpsel, in welchem der Drath eingeklemmt war, oben und unten etwas über die Scheibe hervorragte. Diese Hervorragungen wurden als cylindrisch betrachtet. Ihre Höhe war oben und unten 0,21 cm. Der Radius war oben 0,43 cm, unten 0.47 cm. Ferner war

$$r = 4{,}00 \text{ cm} \qquad h = 0{,}73 \text{ cm} \qquad m = 295{,}88 \text{ gr.}$$

Daraus berechnet sich

$$\log M = 3{,}37109.$$

Bei der Beobachtung mit dem Suspensionsdrath desselben Bifilars, für welches oben die Bestimmung des Momentes ausführlich angegeben ist, war:

$$l = 176{,}3 \text{ cm} \qquad T = 57'',741.$$

Daraus folgt

$$\log \gamma = 3{,}69072.$$

Die Radien der Kugeln und Cylinder mussten möglichst genau gemessen werden. Denn, wie wir sahen, treten dieselben in den Formeln für die Kugeln in der dritten und vierten, bei den Cylindern in der zweiten und dritten Potenz auf.

Desswegen geschah in allen Fällen die endgültige Bestimmung durch Wägung in Luft und Wasser, worauf bei den Cylindern noch die Höhe mit dem Kathetometer gemessen wurde.

Hohlkugel und Hohlcylinder wurden erst leer und dann mit Wasser gefüllt gewogen.

2. Beschreibung der Versuche mit den Kugeln.

Die Kugeln waren aus Messing gefertigt und alle mit der Flüssigkeit in Berührung kommenden Flächen waren vergoldet.

Die Hohlkugel von 3,0022 cm Radius war längs eines horizontalen grössten Kreises durchschnitten; die obere Halbkugel war ihrerseits noch einmal durch einen verticalen Schnitt in zwei Quadranten getheilt.

Sämmtliche Theile stiessen mit breiten Rändern aneinander und wurden durch Schrauben, welche diese Ränder aneinanderpressten, befestigt.

Die beiden oberen Quadranten umschlossen eine axiale cylindrische Oeffnung von 0,61 cm Durchmesser.

Unten sass die Kugel auf einer Stahlaxe auf, die in einer cylindrischen und einer konischen Führung lief. Sie endete in einer Spitze, die auf dem Kopf einer Schraube ruhte. Durch Drehung der letztern konnte man die Kugel etwas heben und senken und dadurch ihre Haltung in der konischen Führung fester oder loser machen.

Auf die Axe wurde eine Messingrolle zur Aufnahme des treibenden Fadens gesteckt. Diese trug gleichzeitig den erwähnten Platinstift für den Quecksilbercontact.

Die innern Kugeln, deren drei von 1,5046, 2,0045 und 2,5024 Radius vorhanden waren, trugen in der Verlängerung eines Durchmessers einen Messingdrath von 0,26 cm Durchmesser, welcher durch die obere Oeffnung in der Hohlkugel hindurch geführt und an den untern Messingbacken des Bifilars befestigt werden konnte. Diese Befestigung geschah so, dass der Drath durch eine Durchbohrung der Backen, deren Mitte in der Fadenebene lag, hindurchgesteckt und mit zwei Muttern, die auf dem mit Schraubengängen versehenen

3*

Drath liefen, von oben und von unten festgeschraubt wurden. Die obere Mutter trug gleichzeitig den Spiegel.

Die Einfüllung der Flüssigkeit in den Apparat geschah in folgender Weise: Nachdem die obere Hälfte der Hohlkugel entfernt war, wurde soviel Wasser in die untere gegossen, dass nach Eintauchen der innern Kugel dieses bis zum Rand der untern Hälfte stand.

So wurde das Anhängen von Luftblasen an der untern Hälfte der innern Kugel vermieden.

Dann wurden die beiden oberen Quadranten aufgeschraubt, die Fugen mit Klebwachs gedichtet und nun mit einer Pipette durch die obere Oeffnung der Hohlkugel soviel Wasser nachgefüllt, bis die ganze Kugel und auch der Canal am oberen Ende derselben voll waren.

Es kam dabei leicht vor, dass die Bildung einer Luftblase in dem erwähnten Canal ein Ueberfliessen des Wassers verursachte, ehe die Kugel ganz gefüllt war.

Um hieraus etwa entspringende Irrthümer zu vermeiden, war aus den Dimensionen der Kugeln die zur Füllung nothwendige Wassermenge berechnet, so dass controlirt werden konnte, ob die Kugel thatsächlich bis oben gefüllt sei.

War die Füllung vollendet, so galt es, die beiden Kugeln concentrisch zu stellen.

Diese Einstellung wurde in der Weise erreicht, dass man nach dem Augenmass die äussere Kugel mit ihrem Gestell so lange verschob, bis der Trägerdrath der innern Kugel in der Mitte des Canales der Hohlkugel erschien.

Dieser Drath trug in passender Höhe eine Marke, welche genau auf den obern Rand des Canals durch Heben oder Senken des Bifilars eingestellt wurde. Die

Marke war so angebracht, dass dann die Centren beider Kugeln gleiche Höhe hatten.

Es zeigte sich hierbei, dass namentlich die kleinste und leichteste Kugel häufig auf die Seite gezogen wurde, so dass ihr Trägerdrath an der Wand des Canals anlag. Indessen genügte ein leichtes Einfetten der Stelle des Drathes, welche durch die Flüssigkeitsoberfläche hindurch ging, diese offenbar capillare Erscheinung zu beseitigen.

Bei den ersten Vorversuchen stellte sich heraus, dass die so beschriebene Anordnung nicht gestattete, die Grösse der Drehgeschwindigkeit unbegrenzt wachsen zu lassen.

Während nämlich bei kleinen Geschwindigkeiten die innere Kugel sich thatsächlich nur um eine Verticalaxe drehte und sich bei einem bestimmten Ablenkungswinkel einstellte, respective hier um eine Ruhelage regelmässige kleine Schwankungen ausführte, trat bei schnellerem Drehen ein „konisches Pendeln" der Kugel und des ganzen Bifilars ein, so dass die erstere aus der concentrischen Stellung mit der Hohlkugel hinaus und nach dem Rande zu gedrängt wurde.

Die Beobachtungen wurden daher auf kleinere Geschwindigkeiten beschränkt.

Uebrigens änderte das Pendeln die Ablenkung nicht merklich, so lange der Trägerdrath noch von der Canalwand frei war, und nur das Auf- und Niederschwanken der Skala und die etwas unruhigere Einstellung zeigte an, dass es eingetreten sei.

Die Kugeln waren vor Beginn der Beobachtungen sorgfältig mit Kalilauge und Alkohol vom Fett befreit. Das angewandte Wasser war destillirtes und war unmittelbar vor den Versuchen frisch ausgekocht.

Als Temperatur der untersuchten Flüssigkeit musste

die der umgebenden Luft angenommen werden, da sich ein Thermometer in die Hohlkugel nicht einführen liess.

Ausser den ausführlicheren Beobachtungen mit Wasser wurde in genau der nämlichen Weise eine kurze Reihe von Versuchen mit Alkohol angestellt.

---

3. Beschreibung der Versuche mit den Cylindern.

Der innere Cylinder war, wie die innere Kugel bifilar aufgehängt. Doch war die Suspension diesmal etwas anders angeordnet, als bei den Kugeln.

Da es sich dort herausgestellt hatte, dass die Messung des Drehmomentes des Bifilars am besten durch Beobachtung von Schwingungsdauern sich vornehmen liess, wurde bei der neuen Suspension von vornherein auf eine genauere Messung des Fadenabstandes verzichtet. Dadurch war man in der Lage den Bifilardrath an den untern Enden uneingeklemmt zu lassen. Es wurde einfach ein einziger Draht mit seinen beiden Enden in die auch bei den Kugeln benutzten oberen Messingbacken geklemmt und unten über eine leicht in Spitzen bewegliche Rolle von etwa zwei Centimeter Durchmesser geführt. Eine Gabel wurde durch die Axe dieser Rolle getragen und an dieser Gabel hing der innere Cylinder.

So war eine gleichmässige Spannung der beiden Bifilardrähte stets gewährleistet. Die Verbindung zwischen der Gabel und dem Cylinder wurde auf folgende Weise bewerkstelligt.

Die Gabel trug an ihrem Ende einen Doppelhaken und ebenso war ein solcher Doppelhaken auf der obern Fläche des Cylinders aufgeschraubt.

Es wurde dann ein kurzer Verbindungsdrath, welcher an jedem Ende einen Knebel trug, einerseits in

den Doppelhaken der Gabel andrerseits in den des Cylinders eingelegt.

Die Knebel dieses Verbindungsstückes waren gegen einander unter rechtem Winkel gestellt, so dass, symmetrische Massenvertheilung im Cylinder vorausgesetzt, dessen Axe sich von selbst jederzeit vertikal stellen musste.

Die Justirung der beiden Cylinder auf Coaxialität geschah folgendermassen: In das Axenlager des Hohlcylinders, welches übrigens dasselbe war, wie bei den Kugeln, passte eine sorgfältig symmetrisch gearbeitete, oben mit einer Spitze versehene Messingaxe. Ferner trug die untere Fläche des innern Cylinders eine genau in der Cylinderaxe liegende Spitze.

Zunächst wurde nun der Hohlcylinder in das Gestell eingesetzt und mit Hülfe einer Libelle seine Axe vertical gestellt. Zu diesem Zweck ruhte das ganze Gestell auf drei Fussschrauben.

War diese Einstellung erreicht so wurde der äussere Cylinder entfernt die Messingaxe eingesetzt und der innere Cylinder an die Suspension angehängt.

Darauf wurde das Gestell so lange verschoben, bis beide Spitzen genau übereinander standen. Schliesslich wurde der Hohlcylinder wieder aufgesetzt und geprüft, ob die Axe noch vertical stand.

War so die genaue Justirung vollzogen, so wurden die Messingteller, auf denen die Fussschrauben des Gestelles ruhten, mit geschmolzenen Klebwachs übergossen, um die Stellung zu fixiren.

Es standen ein Hohlcylinder und drei innere Cylinder zur Verfügung, welche, wie die Kugeln, aus Messing gefertigt und vergoldet waren.

Der Hohlcylinder hatte einen Radius von 2,8985 cm. Der Abstand zwischen seinem oberen Rand und der Grundfläche betrug 17,10 cm.

Die Radien und Höhen der drei innern Cylinder hatten folgende Werthe

$$r_1 = 1{,}4281 \text{ cm} \qquad h_1 = 14{,}321 \text{ cm}$$
$$r_2 = 1{,}9079 \text{ cm} \qquad h_2 = 14{,}321 \text{ cm}$$
$$r_3 = 2{,}4026 \text{ cm.} \qquad h_3 = 14{,}315 \text{ cm.}$$

Diese Werthe von r sind durch Wägung der Cylinder in Luft und Wasser gefunden.

Zur Controle wurde der Durchmesser der drei innern Cylinder ausserdem mittels eines Kathetometers direct gemessen. Dazu wurden die Cylinder auf ein sorgfältig horizontal gestelltes Glastischchen gelegt. Das Fernrohr des Kathetometers wurde durch ein schwach vergrösserndes Mikroskop ersetzt, welches mit einem Ocularmikrometer versehen war.

Wurden dann die Cylinder von der Rückseite scharf beleuchtet, so hatte man eine sehr genaue Einstellung.

Es fand sich so

$$r_1 = 1{,}4222 \qquad r_2 = 1{,}9017 \qquad r_3 = 2{,}3988.$$

Diese Werthe sind alle drei um nahezu denselben geringen Betrag kleiner, als die aus den Wägungen berechneten.

Möglicherweise erklärt sich diese Erscheinung als eine Wirkung der Irradiation, die früher schon bei ähnlichen Messungen als störende Fehlerquelle angeführt worden ist[1]).

Es schien daher rathsam, den späteren Rechnungen ausschliesslich die zuerst angeführten Werthe der r zu Grunde zu legen.

Was weiter die Bestimmung der Höhen anlangt, bis zu welchen die Flüssigkeiten an dem innern Cylinder emporreichten, so ist zu bemerken, dass es dabei

---

1) Kater: Philos. Transact. 1818.

wesentlich auf die genaue Messung der Höhendifferenz bei zwei zusammengehörigen Beobachtungssätzen ankommt. Die absoluten Werthe der Höhen kommen nur soweit in Betracht, als von ihnen der das Bifilarmoment modificirende Wasserauftrieb abhängt.

Bei den ersten Versuchen wurden Winkel aus Hartgummi benutzt, deren einer Schenkel auf dem obern Rand des innern Cylinders auflag, während der andere an dem Cylindermantel vertical nach unten ging.

Es wurde dann so viel Wasser langsam eingegossen, bis die untere Spitze des Winkels eben die Wasseroberfläche berührte. Dieser Moment liess sich ziemlich genau beobachten.

Trotzdem zeigten die so erhaltenen schliesslichen Resultate beträchtliche Abweichungen, welche sich nur durch Ungenauigkeit der Höhenbestimmung erklären zu lassen schienen.

Desshalb wurde ein anderes Verfahren eingeschlagen.

Ein nicht zu weites cylindrisches Glasgefäss wurde mit einem doppelt durchbohrten Kork geschlossen. Durch den Kork führten zwei Glasröhren, deren eine dicht unter dem Kork endete, während die andere fast bis auf den Boden des Glascylinders reichte.

Die letztere war über dem Kork horizontal gebogen und führte nach etwa 40 cm wieder vertical nach unten.

Dabei war darauf geachtet, dass der letztere Schenkel etwas kürzer war, als der andere, welcher sich in dem Glascylinder befand.

Nachdem der innere und äussere Messingcylinder in ihre Lage gebracht waren, wurde der letztere etwa bis zu der Höhe gefüllt, die man zu haben wünschte. Ebenso wurde in den Glascylinder eine entsprechende Menge Flüssigkeit gebracht. Dann wurde der zweite,

nach unten führende Schenkel der oben geschilderten Vorrichtung in den Zwischenraum zwischen beiden Messingcylindern eingeführt und durch Saugen an dem zweiten Glasrohr das Wasser in dem Messing- und dem Glascylinder in Communication gebracht.

Nachdem Gleichgewicht eingetreten war, wurde die Höhe der Flüssigkeit in dem Glascylinder mit Kathetometer abgelesen. Sie musste gleich der momentanen Höhe der Flüssigkeit in dem Messingcylinder sein.

Dann wurde der Kork gelüftet und die Röhre aus dem Wasser herausgezogen.

Da, wie gesagt, das Ende, welches sich im Glascylinder befand, etwas länger war, als das im Messingcylinder, so verliess das letztere die Flüssigkeit bereits, während das Ende des ersteren noch unter Wasser war. In Folge dessen wurde das Wasser aus der Röhre in den Glascylinder zurückgesaugt und konnte nicht in den Messingcylinder gelangen und dort die Höhe des Wasserstandes beeinflussen.

An der so ermittelten Höhe war noch eine Correction anzubringen. Das in den Messingcylinder eintauchende Ende der Röhre hatte eine gewisse Menge Wasser verdrängt, und die abgelesene Höhe war um einen entsprechenden Betrag zu gross.

Diese Correction wurde in der Weise ermittelt, dass man das Ende der Röhre stets bis auf den Boden des äussern Messingcylinders hinabsenkte und dann aus abgelesener Höhe, Durchmesser der Röhre und Radien der Cylinder den Betrag der Correction berechnete.

Diese Methode ist gut anwendbar, so lange die Radien der beiden Messingcylinder hinreichend verschieden sind. Wird dagegen der Zwischenraum zwischen beiden Cylindern so eng, dass das Niveau der

Flüssigkeit beim Herausziehen der Glasröhre beträchtlich sinkt, während es in dem weiteren Glascylinder sich weniger ändert, so strömt, so lange beide Enden des Glasrohres noch unter Wasser sind aus dem Glascylinder Flüssigkeit nach und der Höhenwerth wird falsch.

Zwar hätte man durch Anbringen eines Hahnes in der Mitte des horizontalen Heberschenkels diesem Umstande abhelfen können, doch fürchtete man dadurch Veranlassung zu Verunreinigung des Wassers zu geben, und ausserdem wäre diese Methode für später untersuchte zähere Flüssigkeiten ohnehin unanwendbar gewesen.

Desshalb wurde als eine dritte Methode der Höhenbestimmung die des Auswägens der Flüssigkeit angewandt, bei welcher sich allerdings die Unsicherheiten in der Bestimmung der Cylinderradien auf die ermittelten Höhenwerthe übertrugen.

Man verfuhr hierbei so, dass man ein Becherglas mit einer entsprechenden Menge Flüssigkeit füllte und abwog. Dann wurde die Flüssigkeit in den Messingcylinder gegossen und das leere Glas zurückgewogen. Aus dem Gewicht und der Dichte der Flüssigkeit, sowie aus dem Werth der Cylinderradien und aus dem des Abstandes der beiden Cylindergrundflächen liess sich alsdann die Höhe finden.

Hierbei zeigte es sich, dass eine Correction an dieser Rechnung anzubringen sei, von welcher die Elasticität der Bifilardrähte die Ursache war. Wenn nämlich die Flüssigkeit bis zu einer gewissen Höhe stand, so entlastete der Auftrieb, den der innere Cylinder erfuhr, das Bifilar etwas. Hieraus resultirte eine Verkürzung des ganzen Bifilars in Folge der Elasticität der Suspensionsdrähte. Der Abstand der beiden Grundflächen der Cylinder war für den Fall bestimmt, dass

der innere Cylinder in Luft hing. Der wirkliche Abstand war in Folge des erwähnten Umstandes etwas grösser, als der so bestimmte und die berechneten Höhen mussten etwas zu gross ausfallen.

Diese Fehlerquelle wurde in der Weise unschädlich gemacht, dass man durch directe Beobachtung die Verkürzung bestimmte, welche einer bekannten Entlastung des Bifilars entsprach. Der so ermittelte Dehnungscoefficient heisse δ.

Es wurde dann zunächst aus dem Abstand h_0 [1]) der Bodenflächen, welcher bestimmt war, wenn der innere Cylinder ganz in Luft hing, und dem Gewicht p, sowie dem spezifischen Gewicht s der eingegossenen Flüssigkeit die Höhe angenähert berechnet nach der Formel

$$h = \frac{\frac{1}{s} \cdot p - r_0^2 \pi \cdot h_0}{(r_0^2 - r_1^2)\pi}.$$

Mittels der so gefundenen Höhe und des oben erwähnten Coefficienten δ wurde dann der wahre Abstand der Bodenflächen nach der Formel ermittelt:

$$\overline{h}_0 = h_0 + h r_1^2 \pi \varepsilon . \delta$$

und der so gewonnene verbesserte Werth $\overline{h}_0$ lieferte dann das Mittel, die Höhe genau zu finden.

Zu bemerken ist hier noch, dass bei einer kleinen Entfernung beider Bodenflächen von einander diese durch den wechselnden Auftrieb bedingten Aenderungen von h_0 auch die Werthe von k direct modificiren müssen weil bei zwei, mit verschiedenen Wasserhöhen angestellten conjugirten Beobachtungssätzen der Abstand der Bodenflächen von dem einen Satz zum andern etwas sich ändert. Wir werden auf diesen Umstand später noch einmal zurückkommen.

1) h_0 hat hier eine etwas andere Bedeutung, als die gleichnamige Grösse. P. 21 f.

Ueber die Reinigung der Cylinder von Fett und über die Behandlung speziell des zur Beobachtung verwandten Wassers gilt das nämliche, was oben bei den Kugeln hierüber gesagt wurde.

---

4. Discussion der erhaltenen Resultate.

Zuerst betrachten wir die Resultate, welche die Beobachtung mit den Kugeln ergab, und welche in der Tabelle No. I zusammengestellt sind. Die Tabelle giebt zunächst über jedem Beobachtungssatz den zugehörigen Abstand von Spiegel und Skala (A).

Ferner findet man neben A das Drehmoment des Bifilars angegeben und zwar in folgender Weise:

Wie wir oben sahen, hat man für das Moment μ den Werth

$$\mu = \left(\frac{m.p.q.g}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right)\varphi.$$

Dies ist zur Abkürzung $u.\varphi$ gesetzt, wo u eine für die jeweilig betrachtete Kugel und das angewandte Bifilar constante Grösse ist.

Die Werthe des Logarithmus von u findet man neben A in der Tabelle angegeben.

Da die drei Sätze, welche für jede einzelne Kugel dort aufgeführt sind, mit etwas verschiedenen Bifilaren beobachtet sind, so ändert sich auch für dieselbe Kugel u von Satz zu Satz.

Man findet dann ferner in der Tabelle die einseitigen Skalenausschläge n, corrigirt auf Winkel falls die Correction einen merkbaren Werth erreichte. Die Zahlen unter t geben die zu den nebenstehenden Ausschlägen gehörigen Umdrehungszeiten, während die mit nt bezeichnete Columne das Product der beiden vorgenannten Grössen enthält.

Columne σ_0 giebt die Werthe der Umdrehungsgeschwindigkeiten berechnet nach der Formel $\sigma_0 = \frac{2\pi}{t}$, Columne μ die Drehmomente $\mu = u \cdot \varphi$ und endlich Columne k die Werthe des Reibungscoefficienten, berechnet nach Formel 20), also unter Annahme eines Haftens der Flüssigkeit an der Wand.

Tabelle No. I.

Beobachtungen mit den concentrischen Kugeln.

A. Beobachtungen mit Wasser.

I. Kleinste Kugel.

$r_0 = 3{,}0022 \quad r_1 = 1{,}5046 \quad m_1 = 116{,}085.$

1.

$A = 2708 \quad \log u = 3{,}13389 \quad \vartheta = 17^0$

n	t	nt	σ_0	μ	k
1,95	20,28	39,5	0,31	0,49	0,0161
2,83	14,77	42,2	0,42	0,71	0,0169
4,63	9,80	45,4	0,64	1,17	0,0182
7,25	7,01	50,2	0,91	1,82	0,0201
9,8	5,39	53,0	1,16	2,45	0,0212
12,5	4,51	56,1	1,39	3,13	0,0224
15,3	3,83	58,6	1,64	3,85	0,0234
18,4	3,33	61,1	1,89	4,61	0,0244
21,3	2,92	62,2	2,15	5,35	0,0249
24,6	2,63	64,6	2,39	6,17	0,0258
28,1	2,35	66,1	2,67	7,06	0,0264.

2.

$A = 2290 \quad \log u = 3{,}14680 \quad \vartheta = 19{,}7$

n	t	nt	σ_0	μ	k
15,8	3,19	50,5	1,97	4,82	0,0250
20,7	2,61	54,1	2,40	6,32	0,0269
30,4	1,94	59,0	3,24	9,31	0,0293
31,3	1,91	59,7	3,30	9,59	0,0296
39,1	1,61	63,0	3,90	12,0	0,0313
41,0	1,55	63,7	4,05	12,5	0,0316
51,4	1,32	67,5	4,78	15,7	0,0337
52,2	1,30	67,8	4,84	16,0	0,0337
67,7	1,08	72,9	5,83	20,7	0,0362
77,0	0,98	75,2	6,43	23,6	0,0374
89,0	0,88	78,2	7,14	27,2	0,0388
101,3	0,80	80,5	7,87	31,0	0,0402.

3.

$A = 2561$ $\log u = 3{,}13708$ $\vartheta = 20$

a.

n	t	nt	σ_0	μ	k
5,6	7,54	42,2	0,83	1,53	0,0189
13,7	3,82	52,6	1,64	3,73	0,0233
23,3	2,55	59,4	2,47	6,31	0,0262
34,7	1,89	65,0	3,33	8,99	0,0277
45,0	1,56	70,1	4,04	12,18	0,0309.
34,6	1,88				
23,3	2,55				
13,9	3,81				
5,6	7,56				

b.

n	t	nt
5,9	7,59	44,1
14,2	3,82	54,2
24,0	2,55	61,0
35,6	1,89	67,1
46,1	1,56	71,9.
35,5	1,89	
23,8	2,55	
14,2	3,83	
5,7	7,61	

Anmerkung. Zur Berechnung von nt sind in 3 die Mittelwerthe aus den beiden einander entsprechenden Beobachtungen benutzt. Zur Berechnung von μ, σ_0 und k sind alle vier einander entsprechenden Werthe von n und t aus 3a und 3b zu einem Mittelwerth vereinigt.

II. Mittlere Kugel.

$r_0 = 3{,}0022$ $r_2 = 2{,}0045$ $m = 279{,}710.$

1.

$A = 2641$ $\log u = 3{,}48105$ $\vartheta = 19{,}7$

n	t	nt	σ_0	μ	k
2,1	20,28	41,7	0,31	1,16	0,0130
3,1	14,78	44,9	0,42	1,72	0,0140
5,1	9,80	50,0	0,64	2,86	0,0155
8,1	7,01	57,0	0,91	4,58	0,0177
11,4	5,39	61,5	1,16	6,41	0,0191
14,9	4,46	66,2	1,39	8,36	0,0205
18,2	3,78	68,7	1,64	10,24	0,0213
21,8	3,32	72,3	1,89	12,25	0,0224
25,9	2,94	75,9	2,15	14,54	0,0236
30,1	2,62	78,7	2,39	16,91	0,0244.

2.

$A = 2147 \qquad \log u = 3{,}49441 \qquad \vartheta = 177$

n	t	nt	σ_0	μ	k
18,5	3,20	58,9	1,96	13,4	0,0237
23,8	2,61	62,2	2,40	17,3	0,0249
35,7	1,94	69,3	3,24	25,9	0,0278
37,2	1,91	71,0	3,30	27,0	0,0284
46,6	1,61	74,8	3,91	33,9	0,0301
48,8	1,56	75,9	4,04	35,5	0.0305
60,4	1,32	79,4	4,76	44,0	0,0320
62,1	1,30	80,9	4,83	45,1	0,0324
81,1	1,07	87,1	5,85	58,9	0,0349
92,1	0,98	89,7	6,44	66,8	0,0360
124,0	0,80	98,6	7,87	89,9	0,0396
218,5	0,54	117,5	11,70	156,0	0,0462
253,5	0,49	122,5	12,90	183,0	0,0490.

3.

$A = 2545 \qquad \log u = 3.48466 \qquad \vartheta = 20^\circ$

a.

n	t	nt	σ_0	μ	k
6,9	7,42	50,9	0,83	4,14	0,0175
16,9	3,78	63,8	1,64	10,23	0,0218
28,9	2,53	72,8	2,48	17,52	0,0248
43,1	1,89	81,3	3,33	26,24	0,0277
57,8	1,53	88,5	4,07	34,58	0,0299.
43,8	1,87				
28,8	2,53				
16,8	3,81				
6,8	7,54				

b.

n	t	nt
7,0	7,58	53,0
17,3	3,82	66,1
29,7	2,55	75,2
44,2	1,90	83,4
57,8	1,56	90,2.
44,2	1,89	
29,6	2,53	
17,3	3,82	
7,0	7,51	

III. Grösste Kugel.

$r_0 = 3{,}0022 \quad r_s = 2{,}5024 \quad m_s = 522{,}875.$

1.

$A = 2846 \quad \log u = 3{,}73754 \quad \vartheta = 17{,}5$

n	t	nt	σ_0	μ	k
3,3	20,45	67,9	0,31	3,20	0,0111
4,5	14,87	66,8	0,42	4,32	0,0109
7,2	9,75	69,7	0,64	6,85	0,0110
10,5	7,04	73,6	0,91	10,04	0,0120
14,3	5,47	78,0	1,16	13,67	0,0127
18,5	4,51	83,4	1,39	17,75	0,0136
22,8	3,85	87,5	1,64	21,83	0,0142
27,9	3,33	92,7	1,89	26,73	0,0151
33,3	2,95	98,2	2,15	31,98	0,0160
37,8	2,70	102,0	2,39	36,24	0,0166
44,7	2,37	104,0	2,67	41,96	0,0169.

2.

$A = 2226 \quad \log u = 3{,}75136 \quad \vartheta = 19^0$

n	t	nt	σ_0	μ	k
23,6	3,21	75,7	1,96	29,9	0,0163
31,4	2,61	82,0	2,40	39,7	0,0176
47,2	1,95	92,0	3,23	59,5	0,0197
48,0	1,91	91,2	3,30	60,8	0,0196
62,0	1,60	99,1	3,92	78,5	0,0213
63,9	1,56	99,5	4,03	80,9	0,0214
81,7	1,32	107,4	4,78	103,5	0,0231
82,7	1,30	107,9	4,83	104,7	0,0231
109,2	1,08	117,2	5,83	138,2	0,0252
123,2	0,98	120,2	6,41	155,9	0,0259
143,4	0,88	125,9	7,14	181,4	0,0270
163,5	0,80	131,2	7,85	206,7	0,0280.

3.

$A = 2558 \quad \log u = 3{,}74169 \quad \vartheta = 20$

a.

n	t	nt	σ_0	μ	k
8,4	7,56	63,5	0,83	8,93	0,0120
20,8	3,82	78,9	1,64	22,25	0,0151
37,0	2,54	93,8	2,47	39,64	0,0179
56,3	1,89	106,2	3,31	60,50	0,0203
73,7	1,55	114,0	4,06	79,54	0,0217.
55,7	1,90				
36,5	2,56				
20,4	3,84				
8,4	7,59				

b.

n	t	nt
8,3	7,85	62,5
20,7	3,81	79,4
36,8	2,55	94,6
56,4	1,90	107,7
74,3	1,56	115,9.
56,7	1,90	
37,3	2,55	
20,9	3,82	
8,3	7,60	

B. Beobachtungen mit Alkohol.

I. Kleinste Kugel.

$A = 2497 \qquad \log u = 3{,}14732$

n	t	nt	σ_0	μ	k
7,0	6,15	43,7	1,02	2,2	0,0218
20,0	2,95	59,0	2,13	5,6	0,0269
43,4	1,64	71,0	3,84	12,2	0,0324.

II. Mittlere Kugel.

$A = 2489 \qquad \log u = 3{,}49549$

n	t	nt	σ_0	μ	k
9,1	6,17	56,1	1,02	5,7	0,0193
24,0	2,95	70,8	2,13	15,1	0,0245
52,8	1,64	86,5	3,84	33,2	0,0300.

III. Grösste Kugel.

$A = 2537 \qquad \log u = 3{,}75334$

n	t	nt	σ_0	μ	k
11,5	6,15	70,8	1,02	12,8	0,0134
29,4	2,94	86,5	2,13	32,9	0,0164
67,9	1,63	111,0	3,84	75,9	0,0209.

Setzen wir, wie oben

$$\frac{m.p.qg}{l} + \frac{2\gamma}{l} = u,$$

so lautet Formel 19b):

$$u\varphi = \frac{8\sigma_0 \pi k}{\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3}},$$

oder, da wir setzen können

$$\varphi = \frac{n}{2A} \qquad \sigma_0 = \frac{2\pi}{t}$$

$$\frac{un}{2A} = \frac{16\pi^2 k}{t\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3}\right)}.$$

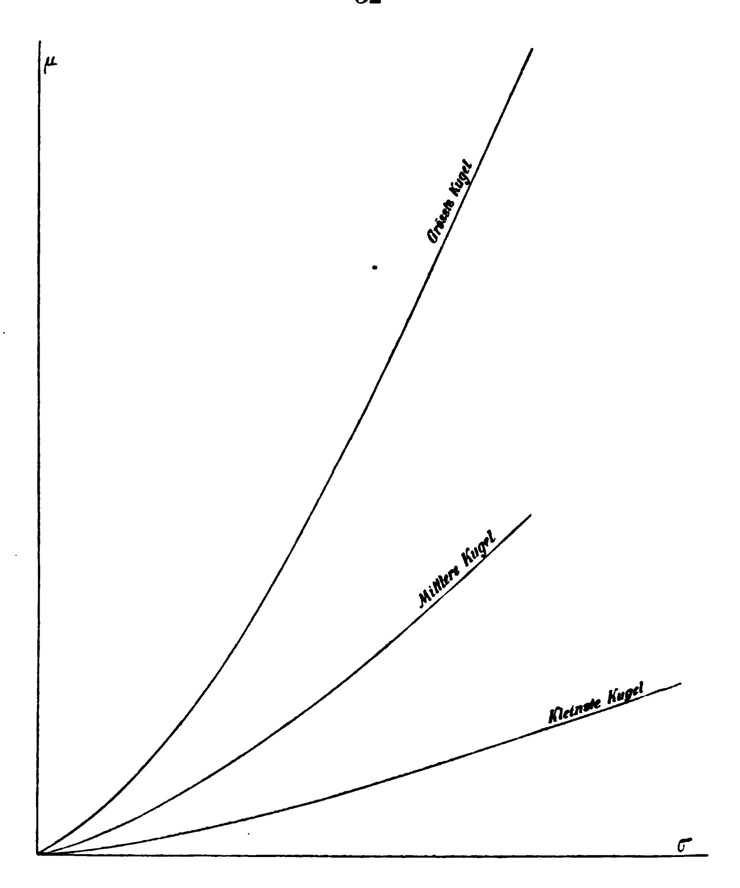
Demnach hat man

$$nt = \frac{32A\pi^2 k}{u\left(\frac{1}{R_1^3} - \frac{1}{R_0^3}\right)}.$$

Rechts stehen ausschliesslich Grössen, die constant sind, so lange wir dasselbe Bifilar und dieselbe Kugel betrachten. Es ist weiter zu bemerken, dass man diese theoretische Forderung einer Constanz des Productes nt ebenso würde gefunden haben, wenn man über das Verhalten der Flüssigkeit an der Wand eine der allgemeinern früher betrachteten Voraussetzungen gemacht, und dem entsprechend die Grösse a nicht der Gleichung 16), sondern der Gleichung 14) oder 15) entnommen hätte.

Sehen wir nun die Columne nt unserer Tabelle durch, so zeigt sich ein höchst eigenthümliches Resultat: Die von der Theorie geforderte Constanz des Produktes nt ist thatsächlich auch nicht angenähert vorhanden. In allen Beobachtungssätzen, ohne Ausnahme zeigt nt viel mehr ein deutlich ausgesprochenes starkes Wachsen mit wachsender Drehgeschwindigkeit.

Um die Beobachtungen für ein und dieselbe Kugel sämmtlich mit einander vergleichbar zu machen, wurde dann σ_0 und μ berechnet, und die Curve $\mu = f(\sigma_0)$ construirt.



Man sieht aus der Figur, dass diese Curven, welche theoretisch gerade Linien durch den Anfangspunkt darstellen sollten, in Wahrheit eine ganz andere Gestalt haben, und dass namentlich für kleine Werthe σ die Curven sich durchaus nicht in ihrer Gestalt einer Geraden nähern.

Bei dieser Inconstanz von $n.t$ oder $\frac{\mu}{\sigma_0}$ kann natürlich auch k keinen constanten Werth bekommen. Es wächst vielmehr ebenfalls stark mit wachsender Geschwindigkeit.

Die Frage ist nun, woraus sich dieser Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung erklären lässt.

Dass zufällige Beobachtungsfehler die Ursache sein sollten ist unwahrscheinlich, schon des regelmässigen Verlaufes der Curve $\mu = f(\sigma_0)$ wegen. Es wurde ferner direct versucht, ob Fehler in der concentrischen Justirung beider Kugeln einen merkbaren Einfluss hätten. Aber weder seitliche, noch verticale Excentricität zeigten einen solchen. In allen Fällen war nur eine grössere Unruhe der Einstellung, keine Aenderung des Ausschlages zu bemerken.

Temperaturänderungen können ebenfalls nicht als Grund der Erscheinung angesprochen werden. Dieselbe blieb unverändert in ihrem allgemeinen Charakter, ob während der Dauer einer Beobachtungsreihe die Temperatur stieg oder fiel.

Um weiter den Verdacht auszuschliessen, als handle es sich um Verunreinigungen, welche sich allmählich dem Wasser beigemischt und seine Zähigkeit erhöht hätten, wurde der Satz 3 der Tabelle I in folgender Weise beobachtet:

Zunächst wurden die Ablesungen 3a für die kleinste Kugel gemacht. Wie man aus der Tabelle sieht, wandte man hierbei fünf verschiedene Drehgeschwindigkeiten in auf- und absteigender Linie an. Dann folgte in derselben Weise Satz 3a für die mittlere und grösste Kugel und endlich 3b für die grösste, mittlere und kleinste Kugel. Die Werthe μ und k, welche hierbei gleicher Kugel und gleicher Drehgeschwindigkeit entsprechen, zeigen gute Uebereinstimmung. Demnach ist eine dauernde Vergrösserung des Reibungscoefficienten für alle Geschwindigkeiten, wie sie die Folge einer Verunreinigung des Wassers hätte sein müssen, nicht eingetreten.

Die beobachtete Erscheinung kann ferner auch nicht darauf zurück geführt werden, dass etwa die beiden Fäden des Bifilars keine gleiche Spannung besessen hätten.

Abgesehen davon, dass die Erscheinung bei den verschiedenen Bifilaren, mit denen beobachtet wurde, sich immer in gleicher Weise wiederholte, kann man dies in folgender Weise zeigen:

Denkt man sich die Fäden in extremer Weise ungleich gespannt, so dass die Kugel in der Ruhelage unifilar hängt, so müssen zuerst, für kleine Geschwindigkeiten, die Ausschläge sehr stark wachsen, entsprechend dem geringen Torsionsmoment des Drathes. Später, wenn durch genügend gesteigerten Drehwinkel der zweite Bifilarfaden ebenfalls gespannt ist, beginnt das Bifilarmoment zu wirken und die Ausschläge müssen sehr viel langsamer weiter wachsen.

Das heisst aber, die Curve $\mu = f(\sigma_0)$ hätte in diesem Falle der Axe der σ_0 ihre concave Seite zuwenden müssen, während unsere Figur zeigt, dass sie ihre convexe Seite der genannten Axe zukehrt.

Endlich könnte man noch denken, die Reibung welche der Trägerdrath der innern Kugel in dem mit Flüssigkeit gefüllten Canal der Hohlkugel erleidet, hätte die Erscheinung bedingt.

Aber einerseits hätte das dieser Reibung entspringende Drehmoment seinerseits der Drehgeschwindigkeit proportional sein müssen, könnte also mit der Abweichung des Gesammtmomentes von dieser Proportionalität nichts zu thun haben, und andrerseits zeigt Rechnung und Beobachtung gleichmässig, dass der in Rede stehende Einfluss unmerklich war.

Der Canal der Hohlkugel war 1,35 cm. lang und hatte einen Radius von 0,305 cm. Der Radius des Querschnittes des Suspensionsdrathes betrug 0,13 cm.

Das Moment, welches der Drath durch die Reibung der Flüssigkeit erfährt, ist nach Formel 25) $\mu = 4a\pi k . h$, oder wenn wir den Werth für a der Formel 24) entnehmen

$$\mu = \frac{4\pi k \sigma_0 . h}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}}.$$

Nimmt man für k den grössten bisher angegebenen Werth $k = 0{,}014$ so wird

$$\frac{4\pi k h}{\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}} = 0{,}00049.$$

Nun ist beispielsweise für die fünfte Beobachtung des ersten Satzes der kleinsten Kugel

$$\sigma_0 = 0{,}91 \qquad \mu = 1{,}82.$$

Nehmen wir auch σ zu gross an, etwa $= 1$, so wird doch der Antheil den die Reibung am Draht liefert erst gleich 0,00049, eine Grösse die gegenüber dem Betrage 1,82 des Gesammtmomentes völlig ausser Betracht bleiben kann.

Dem entsprechend zeigen denn auch die Einstellungen der Kugel keine Aenderung, ob der Canal der Hohlkugel gefüllt oder leer ist.

Durch Beobachtungsfehler erscheint hiernach der Widerspruch zwischen Theorie und Beobachtung nicht erklärlich.

Unsere Versuche bestätigen also das Resultat, welches Elie aus seinen Beobachtungen geschlossen hatte: die Methode der concentrischen Kugeln ergiebt keine constanten, sondern mit der Drehgeschwindigkeit wachsende Werthe für den Reibungscoefficienten k.

Daraus, dass die für gleiche Geschwindigkeit und verschiedene Kugeln gefundenen Werthe k nicht über-

einstimmen, dürften wir unter diesen Umständen kaum berechtigt sein, weitere Schlüsse zu ziehen.

Wäre die Theorie mit dem Experiment in Uebereinstimmung, also der Werth von k in der That konstant, so würde, wie wir dies später bei den Cylindern noch ausführlicher werden zu erörtern haben, eine Differenz der gefundenen Werthe k bei den verschiedenen Kugeln auf ein Gleiten der Flüssigkeit an der Wand hindeuten.

Zeigt sich indessen k, wie in unserm Falle, mit der Drehgeschwindigkeit veränderlich, so beweist dies, dass die aufgestellte Theorie physikalisch falsch ist, und damit fallen auch alle weiteren aus ihr zu ziehenden Folgerungen in sich zusammen.

Beweisen nun unsere Versuche in der That, dass der in unseren Differentialgleichungen, wie wir sie unter Formel 3) aufgestellt haben, eingeführte Coefficient k von der Geschwindigkeit abhängt, oder mit andern Worten, dass jene Differentialgleichungen, physikalisch betrachtet, falsch sind?

Elie schliesst in dem citirten Aufsatz in der That so. Es scheint mir aber, als sei der Schluss kein zwingender. Denn, wie wir in der theoretischen Entwicklung wiederholt betonten, sind die Formeln für die Kugelmethode nur unter gewissen Vernachlässigungen abzuleiten gewesen, und es erscheint die Frage berechtigt, ob denn nicht vielleicht diese Inexactheit der Behandlung an dem Widerspruch zwischen Theorie und Experiment Schuld sei.

Die Wahrscheinlichkeit dieser Erklärung muss sehr vergrössert werden, wenn man sieht, wie bei dem ganz ähnlichen Experiment mit den Cylindern, welches exacte Herleitung der Formeln aus den Gleichungen 3) gestattet, die Widersprüche zwischen Theorie und Beobachtung fortfallen.

Tabelle II giebt eine Zusammenstellung der mit den Cylindern erhaltenen Resultate.

Unter A. findet man die Beobachtungen, bei welchen, wie oben auseinandergesetzt ist, die Wasserhöhe mit Hülfe der Gummiwinkel gemessen wurde.

Dann folgen in B Versuche, bei denen die Höhenmessung mit Hülfe des Hebers in der beschriebenen Weise geschah, bei denen aber eine andere Quelle der Ungenauigkeit noch in etwas störend auftrat.

Es sollte eine möglichst lange Reihe von Versuchen bei verschiedenen Geschwindigkeiten angestellt werden. Desshalb wurde eine Holzrolle mit zahlreichen (12) Schnurläufen gewählt, um den äussern Cylinder mittelbar zu treiben. Die Holzrolle war für das phonische Rad etwas zu schwer beweglich und das letztere blieb daher häufig stehen, wodurch die Bestimmung des Ablenkungswinkels und der Drehgeschwindigkeit etwas ungenau wurde.

Unter C und D sind dann möglichst sorgfältig durchgeführte Versuchsreihen gegeben, welche als die eigentlichen definitiven anzusehen sind. Dabei ist in C die Höhe mit Heber gemessen, während sie in D durch Wägung bestimmt wurde.

Unter E. F. G. folgen noch Beobachtungen mit andern Flüssigkeiten, als Wasser. Die Höhenbestimmung geschah hier ausschliesslich durch Wägung.

Die Temperatur der Flüssigkeit wurde vor und nach jeder Beobachtungsreihe mittels eines in 0,1° getheilten Thermometers gemessen. Die Mittel aus diesen Messungen findet man in der Tabelle. Die Beobachtungen von B an sind alle bei einer Temperatur von nahezu 15° angestellt. Ueber die Art in welcher dieselbe unter möglichst geringen Schwankungen auf dieser Höhe gehalten wurde, ist hier noch folgendes einzuschalten:

Es stand ein Blechgefäss in der Gestalt eines Hohlcylinders zur Verfügung, in welches der rotirende Cylinder eingesetzt wurde, und welches denselben möglichst eng einschloss, ohne natürlich seine Drehung zu hindern. Dieses Blechgefäss wurde mit Wasser von 15° gefüllt. Die Beobachtungen wurden dann erst begonnen, wenn auch die zu untersuchende Flüssigkeit diese Temperatur angenommen hatte und während der Beobachtung wurde nöthigen Falls durch Zugiessen von kaltem Wasser oder durch Anwärmen mittels eines Bunsenbrenners dafür gesorgt, dass die Temperatur des Wassers in dem Blechgefäss sich nicht wesentlich änderte.

So gelang es, die Temperaturschwankungen des untersuchten Wassers innerhalb enger Grenzen, etwa 0,4°, zu halten.

Unter A ist in Tabelle II, ebenso wie in Tabelle I der Skalenabstand angegeben. Die Columne $2n$ giebt die auf Winkel reducirten doppelten Skalenausschläge, unter t findet man die zugehörigen Umdrehungszeiten und endlich unter k resp. k_0 den Reibungscoefficienten, berechnet nach Formel 27).

Tabelle No. II.

Beobachtungen mit den coaxialen Cylindern.

Dimensionen der Cylinder. Constanten des Bifilars.

$r_0 = 2{,}8985 \quad r_1 = 1{,}4281 \quad r_2 = 1{,}9079 \quad r_3 = 2{,}4026.$

$m_1 = 522{,}91 \quad m_2 = 948{,}47 \quad m_3 = 1522{,}73.$

$l = 210{,}1 \quad \log\frac{p.q.g}{l} = 0{,}72991 \quad \log\gamma = 3{,}69072.$

A. Beobachtungen mit Wasser.

Höhen gemessen mit Gummiwinkel.

$A = 2594$ Scalentheile.

1. Kleinster Cylinder.

$2n_1$	$2n_2$	$2n_3$	$2n_4$	t_{12}	t_{34}	k_{12}	k_{34}
19,3	12,4	12,9	6,7	7,815	7,814	0,0104	0,0105
39,6	26,4	27,9	14,8	3,950	3,947	0,0099	0,0113
61,3	41,3	43,3	23,9	2,640	2,636	0,0101	0,0110
83,7	57,0	60,3	34,3	1,960	1,958	0,0098	0,0109
103,3	72,0	75,6	44,2	1,590	1,592	0,0092	0 0106

$h_1 = 13{,}271$ $h_2 = 8{,}349$ $h_3 = 8{,}349$ $h_4 = 3{,}380$

$\vartheta_{12} = 17{,}3$ $\vartheta_{34} = 14{,}6.$

2. Mittlerer Cylinder.

$2n_1$	$2n_2$	$2n_3$	t_{12}	t_{23}	k_{12}	k_{23}
26,8	16,9	8,4	7,816	7,814	0,0114	0,0110
55,0	36,4	18,7	3,953	3,951	0,0106	0,0115
84,3	57,2	30,6	2,638	2,637	0,0102	0,0115
116,0	80,3	44,4	1,960	1,959	0,0099	0,0115
145,8	101,9	57,1	1,595	1,595	0,0098	0,0116

$h_1 = 13\ 271$ $h_2 = 8{,}349$ $h_3 = 3{,}380$ ϑ_{12} 14,6 ϑ_{23} 14,5

3. Grösster Cylinder.

$2n_1$	$2n_2$	$2n_3$	t_{12}	t_{23}	k_{12}	k_{23}
43,6	27,1	12,1	7,801	7,813	0,0106	0,0110
87,9	56,1	26,8	3,950	3,950	0,0103	0,0107
132,6	86,4	42,3	2,635	2,639	0,0099	0,0108
179,1	119,0	60,2	1,960	1,958	0,0095	0,0106
222,4	148,0	77,4	1,591	1,591	0,0095	0,0103

$h_1 = 13{,}266$ $h_2 = 8{,}343$ $h_3 = 3{,}375$ ϑ_{12} 16,0 ϑ_{23} 16,4.

B. Beobachtungen mit Wasser.

Höhe gemessen mit Heber.

$A = 2594$ Scalentheile.

1. Kleinster Cylinder.

$2n_1$	$2n_2$	t	k
8,2	4,6	18,678	0,0112
11,6	6,5	13,554	0,0105
18,0	10,3	8,914	0,0114
25,7	14,9	6,372	0,0114
33,5	18,4	5,075	0,0128
41,3	24,6	4,116	0,0112
48,7	29,5	3,506	0,0108
56,8	35,7	3,036	0,0102
65,5	41,1	2,682	0,0104
74,3	49,2	2,397	0,0094
84,1	54,3	2,143	0,0101

$h_1 = 13{,}386$ $h_2 = 7{,}486$ $\vartheta_1 = 15{,}14$ $\vartheta_2 = 14{,}89.$

2. Mittlerer Cylinder.

$2n_1$	$2n_2$	t	k
11,4	1,9	17,980	0,0111
16,4	2,9	12,717	0,0110
25,6	5,0	8,325	0,0110
37,7	7,6	5,764	0,0111
48,5	9,9	4,576	0,0113
59,0	12,6	3,800	0,0113
72,5	15,5	3,140	0,0115

$h_1 = 13{,}905$ $h_2 = 1{,}725$ $\vartheta_1 = 15{,}2$ $\vartheta_2 = 15{,}17.$

C. Beobachtungen mit Wasser.

Höhe gemessen mit Heber.

$A = 4986$ Scalentheile.

1. Kleinster Cylinder.

a.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
48,0	22,2	6,530	0,01120	+ 0,00005	0,01125
94,4	45,3	3,465	0,01123	+ 0,00007	0,01130
143,8	70,8	2,352	0,01127	+ 0,00008	0,01135
194,7	97,8	1,781	0,01127	+ 0,00008	0,01135
246,0	124,4	1,445	0,01145	+ 0,00009	0,01154

$h_1 = 13{,}321$ $h_2 = 7{,}705$ ϑ_1 14,95 ϑ_2 15,25

b.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
25,9	11,8	11,703	0,01115	+ 0,00004	0,01119
50,9	24,2	6,200	0,01109	+ 0,00006	0,01115
77,4	37,6	4,201	0,01115	+ 0,00007	0,01122
105,0	51,5	3,183	0,01134	+ 0,00007	0,01141
131,4	65,4	2,586	0,01132	+ 0,00008	0,01140

$h_1 = 13{,}497$ $h_2 = 5{,}897$ ϑ_1 14,99 ϑ_2 15,14.

2. Mittler Cylinder.

a.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
59,0	17,1	6,607	0,01118	+ 0,00008	0,01126
116,7	37,7	3,500	0,01114	+ 0,00011	0,01125
179,1	60,9	2,378	0,01117	+ 0,00013	0,01130
245,8	86,5	1,807	0,01139	+ 0,00015	0,01154
308,0	113,5	1,471	0,01126	+ 0,00017	0,01143

$h_1 = 12{,}929$ $h_2 = 2{,}890$ ϑ_1 15,12 ϑ_2 15,16.

b.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
34,1	11,1	11,746	0,01117	+ 0,00008	0,01125
67,0	23,8	6 188	0,01094	+ 0,00011	0,01105
101,0	37,2	4,213	0,01096	+ 0,00012	0,01108
138,6	53,0	3,143	0,01091	+ 0,00014	0,01105
173,5	68,0	2,555	0,01089	+ 0,00015	0,01104

$h_1 = 13{,}570$ $h_2 = 3{,}945$ ϑ_1 15,0 ϑ_2 14,87.

3. Grösster Cylinder.

a.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
116,0	33,8	6,306	0,01085	+ 0,00013	0,01098
173,2	51,8	4,271	0,01083	+ 0,00015	0,01098
239,5	73,6	3,133	0,01082	+ 0,00017	0,01099
296,2	93,0	2,553	0,01078	+ 0,00018	0,01096

$h_1 = 14{,}215$ $h_2 = 3{,}652$ ϑ_1 15,2 ϑ_2 15,1.

b.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
51,0	13,9	13,088	0,01033	+ 0,00009	0,01042
100,0	28,2	6,988	0,01064	+ 0,00011	0,01075
150,4	43,0	4,742	0,01079	+ 0,00012	0,01091
199,3	59,3	3,564	0,01053	+ 0,00013	0,01066
248,1	75,3	2,902	0,01056	+ 0,00015	0,01071

$h_1 = 13{,}927$ $h_2 = 3{,}419$ ϑ_1 15,1 ϑ_2 15,35.

c.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
105,0	45,4	6,608	0,01045	+ 0,00015	0,01060
209,2	93,3	3,399	0,01038	+ 0,00018	0,01056
310,8	142,5	2,322	0,01024	+ 0,00021	0,01045
416,8	195,7	1,756	0,01006	+ 0,00024	0,01030
524,2	261,6	1,420	0,00959	+ 0,00031	0,00990

$h_1 = 13{,}848$ $h_2 = 5{,}688$ ϑ_1 15,0 ϑ_2 14,95.

D. Beobachtungen mit Wasser.

Höhe gemessen durch Auswägen.

$A = 4986$ Scalentheile.

1. Kleinster Cylinder.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
26,6	10,4	13,039	0,01133	+ 0,00003	0,01136
42,4	21,3	6,987	0,01148	+ 0,00003	0,01151
64,7	31,9	4,743	0,01162	+ 0,00004	0,01166
87,0	41,3	3,574	0,01124	+ 0,00004	0,01128
110,2	52,2	2,923	0,01161	+ 0,00005	0,01166

$h_1 = 11{,}909$ $h_2 = 5{,}137$ ϑ_1 15,3 ϑ_2 14,85.

2. Mittler Cylinder.

a.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
26,4	17,6	13,008	0,01075	+ 0,00006	0,01081
52,0	35,1	6,916	0,01092	+ 0,00007	0,01099
78,7	53,8	4,703	0,01088	+ 0,00008	0,01096
107,3	74,0	3,553	0,01095	+ 0,00008	0,01103
134,3	93,3	2,889	0,01092	+ 0,00009	0,01101

$h_1 = 11,417$ $h_2 = 7,288$ ϑ_1 15,15 ϑ_2 14,95.

b.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
26,4	9,2	13,008	0,01111	+ 0,00005	0,01116
52,0	19,8	6,916	0,01095	+ 0,00006	0,01101
78,7	30,8	4,703	0,01104	+ 0,00007	0,01111
107,3	43,0	3,553	0,01116	+ 0,00008	0,01124
134,3	54,8	2,889	0,01119	+ 0,00008	0,01127

$h_1 = 11,417$ $h_2 = 3,133$ ϑ_1 15,15 ϑ_2 14,80.

3. Grösster Cylinder.

a.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
42,0	29,7	13,051	0,00977	+ 0,00002	0,00979
82,7	58,8	6,922	0,01004	+ 0,00002	0,01006
123,6	88,3	4,708	0,01006	+ 0,00002	0,01008
166,4	119,0	3,554	0,01019	+ 0,00002	0,01021
204,0	147,5	2,906	0,00989	+ 0,00003	0,00992

$h_1 = 11,205$ $h_2 = 7,641$ ϑ_1 15,07 ϑ_2 14,90.

b.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
42,0	15,7	13,057	0,01033	— 0,00001	0,01032
82,7	31,5	6,922	0,01064	— 0,00001	0,01063
123,6	48,4	4,708	0,01060	— 0,00001	0,01059
166,4	67,0	3,554	0,01054	- 0,00001	0,01053
204,0	85,1	2,906	0,01026	— 0,00001	0,01025

$h_1 = 11,205$ $h_2 = 3,552$ ϑ_1 15,07 ϑ_2 15,05.

E. Beobachtungen mit Alkohol v. d. Dichte 0,8015 b. 15°.

$A = 4986$ Scalentheile.

1. Kleinster Cylinder.

$2n_1$	$2n_2$	t	k
26,0	8,5	12,923	0,01450
132,1	48,8	2,905	0,01536

$h_1 = 12,112$ $h_2 = 3,278$ $\vartheta_1 = 15,25$ $\vartheta_2 = 15,25$.

2. Mittler Cylinder.

a.

$2n_1$	$2n_2$	t	k
32,9	22,7	12,940	0,01430
65,7	45,6	6,886	0,01463
99,1	70,5	4,670	0,01432
134,6	95,9	3,535	0,01466
168,0	119,8	2,886	0,01490

$h_1 = 11{,}872$ $h_2 = 8{,}093$ ϑ_1 15,2 ϑ_2 15,3.

b.

$2n_1$	$2n_2$	t	k
32,9	14,2	12,940	0,01349
65,7	28,4	6,886	0,01432
99,1	43,9	4,670	0,01433
134,6	60,8	3,535	0,01446
168,0	75,8	2,836	0,01476

$h_1 = 11{,}872$ $h_2 = 4{,}295$ ϑ_1 15,2 ϑ_2 14,8.

F. Beobachtungen mit Glycerin v. d. Dichte 1,2305 b. 15°.

A = 1924 Scalentheile.

1. Kleinster Cylinder.

$2n_1$ [1]	$2n_2$	t	k_0	δk	k
191,6	105,5	40,767	2,263	+ 0,002	2,265
267,4	200,3	21,582	2,341	+ 0,002	2,343
543,3	292,7	14,721	2,399	+ 0,002	2,401
614,7	330,7	13,077	2,394	+ 0,001	2,395
1157,9	620,0	6,923	2,424	+ 0,001	2,425

$h_1 = 4{,}867$ $h_2 = 2{,}490$ ϑ_1 15,2 ϑ_2 15,2.

2. Mittler Cylinder.

$2n_1$	$2n_2$	t	k_0	δk	k
301,4	142,6	40,992	2,305	+ 0,004	2,309
566,8	268,0	21,869	2,319	+ 0,004	2,323
830,4	395,0	14,910	2,303	+ 0,004	2,307

$h_1 = 5{,}726$ $h_2 = 2{,}509$ ϑ_1 15,3 ϑ_2 15,15.

G. Beobachtungen mit Olivenöl v. d. Dichte 0,9160 b. 15°.

A = 1859 Scalentheile.

Mittler Cylinder.

$2n_1$	$2n_2$	k	k
286,6	117,6	13,262	0,977
546,1	224,5	6,966	0,975
809,8	331,0	4,754	0,995
1097,3	444,1	3,565	0,993
1363,0	541,5	2,925	1,005

$h_1 = 4{,}253$ $h_2 = 1{,}416$ ϑ_1 15,1 ϑ_2 15,0.

---

1) In den Sätzen F u. G sind unter n die uncorrigirten Skalenablesungen aufgeführt.

Wir müssen, um Tabelle II völlig verständlich zu machen nun noch auf zwei Fehlerquellen eingehen, die in den Beobachtungssätzen, welche Anspruch auf möglichste Genauigkeit machen, also C bis G, berücksichtigt und eliminirt sind.

Unsere Formeln 26) 27) setzen wie wir sahen, voraus, dass mit ein und demselben innern Cylinder zwei Reihen Beobachtungen vorliegen, bei denen die Wasserhöhen verschieden gewählt sind, während Drehgeschwindigkeit und Abstand der Bodenflächen beider Cylinder genau dieselben bleiben.

Nun ist eine absolute Constanz der Drehgeschwindigkeiten nicht zu erzielen.

Wenn auch das phonische Rad stets mit der nämlichen Geschwindigkeit rotirt, so beeinflussen doch Beschaffenheit und Spannung der treibenden Schnüre den schliesslichen Werth der Geschwindigkeit des bewegten Cylinders. Nun sind, wie ein Blick in die Tabelle zeigt, bei den Cylindern die direct abgelesenen Ausschläge nahe proportional den Umdrehungsgeschwindigkeiten, oder indirect proportional den Zeiten t.

Desswegen war es möglich, in einem Satze die einer bestimmten Wasserhöhe entsprechenden Ausschläge durch Interpolation auf diejenigen Geschwindigkeiten zu corrigiren, bei welchen die entsprechenden Beobachtungen bei der andern Wasserhöhe erhalten waren.

Die $2n$ in der Tabelle sind schon in dieser Weise verbessert, und zwar ist die Correctur jedesmal an den Ausschlägen angebracht, welche der kleinern Wasserhöhe entsprachen. Dabei wurde folgendermassen verfahren:

Für die beiden Ausschläge, welche bei der nämlichen Wasserhöhe zwei wenig verschiedenen Zeiten t entsprechen, hat man nach dem Gesagten:

$$\varphi_0 t_0 = \varphi_1 t_1 \text{ also } \varphi_0 = \frac{\varphi_1 t_1}{t_0}.$$

Bei der Geschwindigkeit $\frac{2\pi}{t_1}$ war φ_1 beobachtet worden; φ_0 entsprechend der Drehzeit t_0 wird gesucht. Hat man dann $t_0 = t_1 + \varepsilon_1$, wo ε_1 eine kleine Grösse gegen t_1 ist, so folgt:

$$\varphi_0 = \frac{t_1 \varphi_1}{t_1 + \varepsilon_1} = \varphi_1 - \frac{\varepsilon_1 \varphi_1}{t_1},$$

wenn man ε_1^2 gegen t_1^2 vernachlässigt.

Die so berechnete Correction erreichte übrigens niemals einen erheblichen Betrag.

Eine zweite Fehlerquelle, die berücksichtigt wurde, ergab sich aus dem schon erwähnten Umstande, dass der Abstand der Bodenflächen des innern und äussern Cylinders in etwas durch die Variation des Auftriebes, den der innere Cylinder erfährt, bei verschiedenen Flüssigkeitshöhen verändert wird.

Um diesem Umstande Rechnung zu tragen, wurde folgende Betrachtung angestellt:

Da für die Bewegung der Flüssigkeit zwischen den beiden Bodenflächen die strenge Theorie nicht gegeben ist, machen wir hier, wo es sich nur um eine Correctionsrechnung handelt, die vereinfachende Annahme, es theile sich die ganze Schicht in Scheiben senkrecht zur Rotationsaxe, welche einzeln als Ganzes rotiren.

Entsprechend der Zähigkeit der Flüssigkeit übt dann ein Element do einer solchen Schicht auf das entsprechende Element der nach abnehmender Höhe hin gelegenen benachbarten Schicht eine Kraft aus $\mathfrak{K} = k \cdot r \frac{d\sigma}{dz} \cdot do$, wenn wir z vertical nach oben rechnen.

Dabei ist die Richtung dieser Kraft auf r senkrecht. Es berechnet sich daraus unmittelbar das Drehmoment, welches die erste Scheibe auf die zweite aus-

übt zu

$$M = \tfrac{1}{2} k \cdot \frac{d\sigma}{dz} \pi \cdot r_1^4.$$

Hierbei muss jede Scheibe von ihren beiden Nachbarn in gleichem aber entgegengesetztem Sinne beeinflusst werden, das heisst, es muss M von z unabhängig sein.

Demnach erhalten wir für σ den Werth:

$$\sigma = b - az.$$

Bezeichnen wir die Winkelgeschwindigkeit der unteren Bodenfläche mit σ_0 und den Abstand beider Bodenflächen mit $\bar{h}$, und nehmen wir an, die Flüssigkeit hafte an den beiden Flächen, so haben wir zur Bestimmung von a und b die Gleichungen:

$$b - a\bar{h} = 0 \qquad b = \sigma_0.$$

Daraus folgt:

$$\sigma = \sigma_0 - \frac{\sigma_0 z}{\bar{h}} \qquad M = \tfrac{1}{2} \frac{k\sigma_0}{\bar{h}} \pi . r^4.$$

Das für uns wesentliche an diesem Resultat ist, dass M indirect proportional erscheint dem Abstande $\bar{h}$ der beiden Bodenflächen.

Gehen wir zurück zu Gleichung 26), so war

$$\mu = u . \varphi = \frac{4\pi (h - h_0) \sigma_0 k}{d_{10}^2} + f$$

wo wieder abkürzend gesetzt ist

$$\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2} = d_{10}^2.$$

Für unsere Correctionsrechnung nehmen wir nun an, dass die Bewegung der Flüssigkeit in dem ganzen Zwischenraum zwischen den beiden Cylindern, bis hinunter zur Bodenfläche des innern, der Theorie gemäss vor sich geht, so dass wir $h_0 = 0$ setzen können.

Dann repräsentirt f in der umstehenden Gleichung ausschliesslich das durch die Flüssigkeitsreibung an der

Bodenfläche des innern Cylinders auf den letztern ausgeübte Drehmoment.

Dem Gesagten zu Folge ist f indirect proportional zu setzen dem Abstand $\overline{h}$ der beiden Bodenflächen, also

$$f = \frac{\psi}{\overline{h}}.$$

Die Grössen $\overline{h}$ für zwei conjugirte Beobachtungssätze unterscheiden wir als $\overline{h}_1$ und $\overline{h}_2$. Dann hat man:

$$u_1 \varphi_1 = \frac{8\pi^2 k h_1}{t d_{10}^2} + \frac{\psi}{\overline{h}_1} \qquad u_2 \varphi_2 = \frac{8\pi^2 k h_2}{t d_{10}^2} + \frac{\psi}{\overline{h}_2}.$$

Wir multipliciren die erste dieser beiden Gleichungen mit $\frac{1}{\overline{h}_2}$ die zweite mit $\frac{1}{\overline{h}_1}$ und subtrahiren. Dann erhalten wir:

$$\frac{u_1 \varphi_1}{\overline{h}_2} - \frac{u_2 \varphi_2}{\overline{h}_1} = \frac{8\pi^2 k}{t d_{10}^2}\left(\frac{h_1}{\overline{h}_2} - \frac{h_2}{\overline{h}_1}\right)$$

oder

$$u_1 \varphi_1 \overline{h}_1 - u_2 \varphi_2 \overline{h}_2 = \frac{8\pi^2 k}{t d_{10}^2}(h_1 \overline{h}_1 - h_2 \overline{h}_2).$$

Nun setzen wir für u_1 und u_2 ihre Werthe ein. Es ist

$$u_1 = \frac{m.p.q.g}{l} + \frac{2\gamma}{l} - \frac{r^2\pi\varepsilon.p.q.g.h_1}{l}$$

$$u_2 = \frac{m.p.q.g}{l} + \frac{2\gamma}{l} - \frac{r^2\pi\varepsilon.p.q.g.h_2}{l}$$

oder, wenn wir zur Abkürzung setzen

$$\frac{m.p.q.g}{l} + \frac{2\gamma}{l} = M \qquad \frac{r^2\pi\varepsilon.p.q.g}{l} = R,$$

$$u_1 = M - R.h_1 \qquad u_2 = M - R.h_2.$$

So folgt

$$M(\varphi_1 \overline{h}_1 - \varphi_2 \overline{h}_2) - R(h_1 \overline{h}_1 \varphi_1 - h_2 \overline{h}_2 \varphi_2)$$
$$= \frac{8\pi^2 k}{t d_{10}^2}(h_1 \overline{h}_1 - h_2 \overline{h}_2).$$

Nun nehmen wir an, $\bar{h}_2$ sei nur wenig von $\bar{h}_1$ verschieden, so dass $\bar{h}_2 = \bar{h}_1(1-\delta)$, wo δ^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann. Dann erhält man:

$$M(\varphi_1-\varphi_2)-R(h_1\varphi_1-h_2\varphi_2)+\delta(M\varphi_2-Rh_2\varphi_2)$$
$$=\frac{8\pi^2 k}{t\,d_{10}^2}(h_1-h_2)+\frac{\delta h_2 . 8\pi^2 k}{t\,d_{10}^2}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$M(\varphi_1-\varphi_2)-R(h_1\varphi_1-h_2\varphi_2)=Z,$$

so folgt

$$\frac{8\pi^2 k}{t\,d_{10}^2}=\frac{Z+\delta\varphi_2(M-Rh_2)}{h_1-h_2+\delta h_2}$$

oder, nach Potenzen von δ bis zur ersten incl. entwickelt:

$$\frac{8\pi^2 k}{t\,d_{10}^2}=\frac{Z}{h_1-h_2}+\delta\left\{\frac{\varphi_2(M-Rh_2)}{h_1-h_2}-\frac{h_2 Z}{(h_1-h_2)^2}\right\}.$$

Bezeichnet man den Werth, den k annehmen würde, wenn $\delta=0$ wäre, durch k_0, so giebt vorstehende Gleichung

$$k=k_0+\frac{\delta t\,d_{10}^2}{8\pi^2}\left\{\frac{\varphi_2(M-Rh_2)}{h_1-h_2}-\frac{h_2 Z}{(h_1-h_2)^2}\right\}$$

oder, wenn man endlich für z wieder seinen Werth setzt und vereinfacht

$$k=k_0+\delta N,$$

wo

$$N=\frac{t\,d_{10}^2}{8\pi^2(h_1-h_2)^2}\left\{M(\varphi_2 h_1-\varphi_1 h_2)+Rh_1h_2(\varphi_1-\varphi_2)\right\}.$$

Nach dieser Formel sind die in Tabelle II *C* ff. angebenen Werthe δk berechnet.

Ueber diese Rechnung sind noch folgende Daten anzuführen:

In Satz *C* war das obere Ende des Bifilars nicht in der Weise beweglich gemacht, wie es früher beschrieben ist, sondern war fixirt.

Es fand sich, dass das untere Ende sich für eine Entlastung von 1 gr um 0,000357 cm hob.

Der Bodenabstand der Cylinder betrug, wenn der innere ganz in Luft hing

1) für den kleinsten 1,309 cm.
2) für den mittlern 1,150 cm.
3) für den grössten 0,940 cm.

In Satz *D* und den folgenden war das Bifilar wieder ebenso oben befestigt, wie bei den Beobachtungen mit den Kugeln. Dadurch hatte sich sowohl der Dehnungscoefficient, als der Abstand der Grundflächen vergrössert.

Die Hebung für 1 gr Entlastung betrug jetzt 0,000557 cm. Der Bodenabstand war in Luft

1) für den kleinsten Cylinder 3,524 cm
2) für den mittleren Cylinder 3,268 cm.

Beim grössten war hier versucht worden, durch Senken des ganzen Bifilars den Bodenabstand constant zu erhalten, was indess nicht ganz gelang.

In den drei Beobachtungsreihen, die man für diesen Cylinder in Satz *D* findet, war

$$\bar{h}_1 = 3{,}039 \qquad \bar{h}_2 = 3{,}031 \qquad \bar{h}_3 = 3{,}049.$$

Mit Hülfe dieser Formeln und Zahlenwerthe sind die in Tabelle II *C* ff. angegebenen Werthe für δk, wie bemerkt, gefunden.

Man sieht, dass im Satze *C*, in welchem beide Bodenflächen einander ziemlich nahe waren, die Correction keineswegs unbeträchtliche Werthe erhält. Dagegen wird dieselbe in Satz *D* fast unmerklich.

Bei den später untersuchten Flüssigkeiten gab nur Glycerin noch merkbare Werthe.

Bei Alkohol dagegen und Olivenöl ist die Correction gänzlich zu vernachlässigen.

Fügen wir noch hinzu, dass in den Sätzen *C* ff.

die Columne k die in der vorbeschriebenen Weise verbesserten Werthe von k_0 enthält, so ist Tabelle II vollständig erklärt.

Sehen wir nun die Werthe von k für Wasser in unserer Tabelle durch, so fällt uns sofort der grosse Unterschied auf, den hier die Resultate gegen die bei den Kugeln erhaltenen zeigen:

k ist merklich von der Drehgeschwindigkeit unabhängig.

Die Schwankungen, die sein Werth zeigt, halten sich innerhalb enger Grenzen, so lange wir bei ein und demselben Cylinder bleiben und ein Fortschritt in einem bestimmten Sinne ist nicht zu bemerken.

Am deutlichsten erkennt man dies aus den beiden Sätzen B, bei welchen angenähert dieselben Geschwindigkeiten benutzt sind, wie im Satz 1 der Tabelle I.

Die Mittelwerthe der einzelnen Sätze für denselben Cylinder zeigen ebenfalls nur geringe Schwankungen, welche wohl ausschliesslich auf die Unsicherheit in der Bestimmung der Höhen zurückzuführen sind. Damit stimmt gut überein, dass diese Schwankungen wachsen mit abnehmender Differenz der beiden Cylinderradien.

Je kleiner diese Differenz wird, je grösser muss bei den von uns angewandten Methoden der Höhenbestimmung die Unsicherheit dieser Grösse werden.

Berechnen wir den Mittelwerth für k aus den Beobachtungen mit den einzelnen Cylindern wie sie in Satz C und D enthalten sind, und gleichzeitig den wahrscheinlichen Fehler dieses Mittelwerthes, wie er sich unmittelbar aus den Abweichungen der einzelnen Beobachtungen vom Mittel ergiebt, so finden wir

1) Für den kleinsten Cylinder

$$k = 0{,}011317 \pm 0{,}000028;$$

2) für den mittleren Cylinder

$$k = 0{,}011143 \pm 0{,}000038;$$

3) für den grössten Cylinder

$$k = 0{,}010485 \pm 0{,}000049.$$

Man sieht, wie in der That der wahrscheinliche Fehler von 1) bis 3) wächst.

Etwas anderes aber ist an diesen Mittelwerthen zu beachten: k nimmt ständig ab vom kleinsten bis zum grössten Cylinder, und zwar liegt der Betrag dieser Abnahme weit über den wahrscheinlichen Fehlern der Mittel.

Wir müssen uns fragen, ob vielleicht ein constanter Fehler die Beobachtungen mit den verschiedenen Cylindern verschieden beeinflusst haben kann, so dass dadurch sich die bemerkten Abweichungen erklären lassen.

Ein solch constanter Fehler könnte in der Bestimmung der Cylinderradien gesucht werden.

Um über die Wahrscheinlichkeit einer solchen Deutung ein Urtheil zu gewinnen, müssen wir den Einfluss untersuchen, den ein Fehler in der Bestimmung von r auf den schliesslichen Werth von k hat.

Wir haben k nach der Formel berechnet:

$$\frac{8\pi^2 k (h_1 - h_2)}{t\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_0^2}\right)}$$

$$= \left(\frac{mpqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right)(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{r_1^2 \pi pqg\varepsilon}{l}(h_1 \varphi_1 - h_2 \varphi_2).$$

Wir nehmen an, es seien die Höhen h unabhängig vom Cylinderradius bestimmt.

Setzen wir zur Abkürzung

$$T = \left(\frac{mpqg}{l} + \frac{2\gamma}{l}\right)\frac{t(\varphi_1 - \varphi_2)}{8\pi^2(h_1 - h_2)}$$

$$\Phi = \frac{\varepsilon pqg}{l}\,\frac{t}{8\pi^2(h_1 - h_2)}(h_1 \varphi_1 - h_2 \varphi_2)$$

so wird

$$k = \left(\frac{T}{r_1^2} - \Phi\right)\left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right).$$

Folglich

$$\frac{\partial k}{\partial r_1} = -\frac{2T}{r_1^3} + \frac{2\Phi r_1}{r_0^2}.$$

Also

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial k}{\partial r_1} = -\frac{2\left(\frac{T}{r_1^2} - \frac{\Phi r_1^2}{r_0^2}\right)}{r_1\left(\frac{T}{r_1^2} - \Phi\right)\left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right)}.$$

Φ ist klein gegen $\frac{T}{r_1^2}$. Wir können daher im zweiten Gliede des Zählers $r_1 = r_0$ setzen und erhalten:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial k}{\partial r_1} = -\frac{2}{r_1\left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right)}.$$

Aehnlich folgt

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial k}{\partial r_0} = +\frac{2}{r_0\left(\frac{r_0^2}{r_1^2} - 1\right)}.$$

Berechnen wir dies, so finden wir für unsere drei Cylinder

$$\frac{1}{k} \cdot r_1 \cdot \frac{\partial k}{\partial r_1} = 1)\ 2{,}64 \quad 2)\ 3{,}50 \quad 3)\ 6{,}36.$$

$$\frac{1}{k} \cdot r_0 \cdot \frac{\partial k}{\partial r_0} = 1)\ 0{,}62 \quad 2)\ 1{,}51 \quad 3)\ 4{,}36.$$

Es fragt sich nun, wie genau die Bestimmung der r gewesen ist.

Die Wägungen, auf denen die Rechnung fusst, mussten zwar des beträchtlichen Gewichtes der Cylinder wegen, auf einer gewöhnlichen Waage ausgeführt werden. Doch gab diese auch bei der stärksten Be-

lastung noch für 0,05 gr einen deutlichen Ausschlag. Es war ferner, da bei den Wägungen in Wasser ein Tariren nicht angängig war, das Verhältniss der Waagebalken untersucht und merklich gleich eins gefunden worden.

Wir werden so die Wägungen bis auf 0,1 gr genau ansehen können.

Die Höhen der Cylinder wurden möglichst sorgfältig mit dem Kathetometer gemessen, dessen Nonius directe Ablesung bis auf 0,05 mm gab. Wir werden daher den wahrscheinlichen Fehler der Höhenmessung auf etwa 0,01 cm annehmen können.

Nennt man p den auf Wasser von 4^0 reducirten Gewichtsverlust eines Cylinders bei der Wägung in Wasser, so hat man:

$$r = \sqrt{\frac{p}{\pi . h}}.$$

Berechnet man nun nach dieser Formel und unter Zugrundelegung der oben angegebenen wahrscheinlichen Fehler von p und h den wahrscheinlichen Fehler der Radien, so findet man:

$$\delta r_1 = 0{,}00093 \qquad \delta r_2 = 0{,}00089$$
$$\delta r_3 = 0{,}00096 \qquad \delta r_0 = 0{,}00091.$$

Unter Berücksichtigung dieser Werthe für $\frac{\partial k}{\partial r}$ und δr, sowie unter Berücksichtigung der von den Fehlern der Radien unabhängigen sonstigen Unsicherheit des Werthes k, wie sie sich in den oben aus den Abweichungen vom Mittel berechneten wahrscheinlichen Fehlern dieser Grösse ausspricht, findet man für dieselbe in den Beobachtungen mit den drei Cylindern folgende, nun auch die Fehler der Radien mit enthaltenden wahrscheinlichen Fehler:

1) für den kleinsten Cylinder

$$k_1 = 0{,}011317 \pm 0{,}000034;$$

2) für den mittleren Cylinder

$$k_2 = 0{,}011143 \pm 0{,}000043;$$

3) für den grössten Cylinder

$$k_3 = 0{,}010485 \pm 0{,}000058.$$

Dabei betragen die Differenzen der Werthe k für die einzelnen Cylinder:

$$k_1 - k_2 = 0{,}000174 \qquad k_1 - k_3 = 0{,}000832.$$

Wie man sieht, ist die Differenz der Werthe k bedeutend grösser, namentlich wenn man die Beobachtungen des kleinsten und grössten Cylinders combinirt, als die Summe der wahrscheinlichen Fehler. Wir müssen daraus schliessen, dass die Unsicherheit in der Bestimmung der Radien nicht hinreicht, die Abweichung der drei erhaltenen Werthe für k zu erklären.

Die Annahme einer Aenderung des bifilaren Drehmomentes ist ebenfalls ausgeschlossen. Denn es wurde bei den Beobachtungen unter den Cylindern abgewechselt und ein Satz des kleinsten Cylinders eröffnete und schloss die ganze Reihe.

Endlich ist auch die Erklärung abzulehnen, als handle es sich um Fehler in der Massenbestimmung der Cylinder.

Ein solcher Fehler hätte dadurch herbeigeführt werden können, dass während der Beobachtung in die innern Cylinder, welche hohl und mit einem angeschraubten Boden unten verschlossen waren, Wasser eingedrungen wäre. Das war aber nicht der Fall. Die nach den Versuchen wiederholte Wägung ergab keine Aenderung des Gewichtes der Cylinder.

So bleibt denn nur die Annahme eines Gleitens

der Flüssigkeit an der Wand übrig und es ist jetzt die Aufgabe, den Reibungs- und Gleitungscoefficienten aus unsern Beobachtungen zu ermitteln.

Wir haben früher schon die Formeln entwickelt, welche für diesen Fall uns gestatten, aus den oben angegebenen Werthen der Grösse k für die einzelnen Cylinder den Werth der beiden absoluten Constanten $\mathfrak{k}$ und λ zu finden.

Es empfiehlt sich mehr, diesen Weg einzuschlagen, als die fraglichen Grössen aus den directen Beobachtungen zu berechnen.

Denn, wie gleich gezeigt werden soll, bekommen Fehler in der Bestimmung des Ablenkungswinkels des inneren Cylinders ein unverhältnissmässig grosses Gewicht, so bald man unter der allgemeineren Annahme $\mathfrak{k}$ berechnet, und in noch erhöhtem Masse gilt dies von λ.

In den Mittelwerthen für k dagegen, wie wir sie oben angegeben haben, kann man mit einiger Sicherheit annehmen, dass die Fehler der Bestimmung des Ablenkungswinkels sich wenigstens zum grössten Theil ausgeglichen haben.

Die Genauigkeit, mit welcher so $\mathfrak{k}$ und λ zu berechnen sind, bleibt allerdings noch immer weit hinter derjenigen, mit der unsere Methode gestatten würde, k zu finden, falls die Flüssigkeit an der Wand fest haftete.

Setzen wir:

$$d_{10}^2 d_{20}^3 - d_{20}^2 d_{10}^3 = D_{12}$$

und beziehen den Index 1) auf den kleinsten, 2) auf den mittleren Cylinder, so haben wir nach Formel 28) 29)

$$\mathfrak{k} = \frac{k_1 k_2 D_{12}}{k_2 d_{20}^3 d_{10}^2 - k_1 d_{10}^3 d_{20}^2} \qquad \lambda = \frac{2 k_1 k_2 D_{12}}{(k_1 - k_2) d_{10}^2 d_{20}^2}.$$

Wir wollen nun zuerst zeigen welchen Einfluss ein Fehler in der Bestimmung der Grösse k auf $\mathfrak{k}$ und λ hat.

Man findet

$$\frac{1}{\mathfrak{k}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial k_1} = \frac{1}{k_1}\left(1 + \frac{\mathfrak{k}\, d_{10}^3\, d_{20}^2}{k_2\, D_{12}}\right)$$

$$\frac{1}{\mathfrak{k}} \cdot \frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial k_2} = \frac{1}{k_2}\left(1 - \frac{\mathfrak{k}\, d_{20}^3\, d_{10}^2}{k_1\, D_{12}}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial k_1} = \frac{1}{k_1}\left(1 - \tfrac{1}{2} \frac{\lambda\, d_{20}^2\, d_{10}^2}{k_2\, D_{12}}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial k_2} = \frac{1}{k_2}\left(1 + \tfrac{1}{2} \frac{\lambda\, d_{20}^2\, d_{10}^2}{k_1\, D_{12}}\right).$$

Nach diesen Formeln ergeben sich, wenn man den oben angegebenen Werth für die wahrscheinlichen Fehler von k berücksichtigt, für $\mathfrak{k}$ und λ, sowie deren wahrscheinliche Fehler folgende Werthe:

1) aus den Beobachtungen mit dem kleinsten und mittlern Cylinder

$$\mathfrak{k}_{12} = 0{,}01265 \pm 0{,}00049 \qquad \lambda_{12} = 0{,}2220 \pm 0{,}0692;$$

2) aus den Beobachtungen mit dem kleinsten und grössten Cylinder

$$\mathfrak{k}_{13} = 0{,}01228 \pm 0{,}00011 \qquad \lambda_{13} = 0{,}3001 \pm 0{,}0251.$$

Alle Werthe gelten für eine Temperatur von 15° Celsius und die Einheiten sind, wie in der ganzen Arbeit Centimeter, Gramm, Sekunde.

Man sieht aus dem Vorstehenden, wie beträchtlich in $\mathfrak{k}$ und λ die wahrscheinlichen Fehler vergrössert sind gegen die der Werthe k.

Es liegt dies daran, dass in unserem Falle die Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{k}}{\partial k}$ und $\frac{\partial \lambda}{\partial k}$, besonders die letzteren, äusserst beträchtliche Werthe annehmen. Da ein Fehler in der Bestimmung des Ablenkungswinkels in demselben Verhältniss in k eingeht so beeinflussen derartige Fehler, wie oben schon betont ist die Grössen $\mathfrak{k}$ und λ sehr viel bedeutender, als die Werthe von k.

Vergleichen wir die Differenz $\mathfrak{k}_{12} - \mathfrak{k}_{13}$ und $\lambda_{12} - \lambda_{13}$ mit den wahrscheinlichen Fehlern der $\mathfrak{k}$ und λ, so zeigt sich, dass dieselbe kleiner ist, als die Summe der wahrscheinlichen Fehler. Sie erklärt sich daher befriedigend aus den unvermeidlichen Unsicherheiten der Beobachtung.

Es sei noch angeführt, dass bei $\mathfrak{k}_{13}$ der wahrscheinliche Fehler 0,9 Prozent des Gesammtwerthes beträgt, bei λ_{13} dagegen 8,4 Procent. $\mathfrak{k}_{13}$ und λ_{13} sollen im Folgenden als die eigentlichen definitiven Werthe der gesuchten Constanten angesehen werden, da bei $\mathfrak{k}_{12}$ und λ_{12} der wahrscheinliche Fehler einen zu bedeutenden Betrag erreicht.

Es mag hier noch bemerkt werden, dass eine Möglichkeit der Erklärung der Differenz jener drei Werthe k auch ohne Annahme einer Gleitung an der Wand noch offen zu stehen scheint: man könnte denken, die Flüssigkeit bedecke die Wandungen in einer Schicht von endlicher Dicke, und diese ganze Schicht hafte fest an der Wand, sodass der Radius des innern Cylinders um einen gewissen Betrag vergrössert der des äussern um ebensoviel verkleinerter scheine. An den so gebildeten Flüssigkeitswänden dürfte man dann kein Gleiten, sondern Haften annehmen, weil im ersteren Falle im Innern der Flüssigkeit eine Unstetigkeit eintreten würde.

Indess ergiebt eine unter diesen Annahmen durchgeführte Rechnung ein Wachsen der k vom kleinsten bis zum grössten Cylinder und dem entsprechend rechnet man für die Dicke der Schicht, wenn man dieselbe am innern und äussern Cylinder als gleich annimmt, sowohl bei Combination von k_1 und k_2 als von k_1 und k_3 negative Werthe heraus. Demnach ist dieser Erklärungsversuch zu verwerfen.

Ehe wir eine Vergleichung unseres Resultates mit dem anderer Beobachter vornehmen können, müssen wir

einige Worte über die Dimensionen unserer beiden Constanten, und die Einheiten, in welchen sie ausgedrückt sind, einschalten. Nehmen wir für k eine der einfachsten Formeln, so haben wir

$$k = \frac{\mu . d_{10}^2}{4\pi\sigma_0 . h_1}.$$

Wir haben bei unsern Rechnungen das Drehmoment μ in absoluten Einheiten ausgedrückt, indem wir das Gramm als Einheit der Masse auffasten und das Gewicht in der Form $m . g$ darstellten.

Demnach erhält μ die Dimension $[m l^2 t^{-2}]$ und k die folgende: $[m t^{-1} l^{-1}]$.

Soll das Resultat, welches man bei der Ableitung der Dimension von k aus der ursprünglichen Differentialgleichung erhält, hiermit übereinstimmen, so muss man darin die Dichte ε nicht als eine Verhältnisszahl, sondern als Werth der Masse in der Volumeinheit auffassen, das heisst man muss ε die Dimension geben $[m l^{-3}]$.

Als Einheiten haben wir durchgehend Centimeter, Gramm, Sekunde gewählt, sodass wir also haben:

$$\mathfrak{k} = 0{,}01228 \text{ cm}^{-1} \text{ gr sec}^{-1}.$$

Helmholtz[1]), dessen Formeln wir zuerst betrachten wollen, hat eine etwas andere Bezeichnung. Er nennt k^2, was bei uns $\frac{k}{\varepsilon}$ heissen würde. Wir wollen im Folgenden seine Constanten durch grosse Buchstaben kennzeichnen.

Bei ihm hat K^2 die Dimension $[l^2 t^{-1}]$, K also die folgende: $[l t^{-\frac{1}{2}}]$ und er bedient sich als Einheit des Millimeter und der Sekunde.

1) Helmholtz und Piotrowski: Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. Wiener Berichte Bd. 40, 1860.

Für K^2 giebt er nach den Beobachtungen von Poiseuille eine Formel, welche den Reibungscoefficienten für verschiedene Temperaturen zwischen 0^0 und 45^0 zu ermitteln gestattet.

Diese lautet in unsern Einheiten und Bezeichnungen:

$$\frac{k}{\varepsilon} = \frac{0{,}017790}{1 + 0{,}0336793\,\vartheta + 0{,}0002209936\,\vartheta^2}.$$

O. E. Meyer[1]), welcher die Beobachtungen von Poiseuille ebenfalls in eine Formel zusammenfasst, wählt zwar ebenso, wie wir es gethan haben, das Centimeter als Längeneinheit, aber er misst die Masse und die Dichte anders. Er nimmt ε als Verhältnisszahl. Dadurch erhält die Masse die Dimension $[l^3]$ und k die Dimension $[l^2 t^{-1}]$.

Nimmt man, wie wir es gethan haben, als Längeneinheit das Centimeter, als Masseneinheit das Gramm und setzt man andrerseits, falls man sich der Bezeichnungsweise von O. E. Meyer anschliesst, die Dichte des Wassers bei 4^0 gleich eins, so werden sich die Zahlenwerthe, die man nach beiden Bezeichungen für k erhält, nicht von einander unterscheiden.

Die erwähnte Formel bei O. E. Meyer lautet

$$k = \frac{0{,}01775}{1 + 0{,}03315\,\vartheta + 0{,}0002437\,\vartheta^2}.$$

Was ferner unsern Coefficienten λ anlangt, so ist derselbe andrer Dimension als k.

Man erkennt aus den Gleichungen, in denen er zusammen mit k auftritt, sofort, dass $\frac{k}{\lambda} = [l]$, dass also λ nach unserer Bezeichnung von der Dimension sein muss: $[m l^{-2} t^{-1}]$.

---

1) O. E. Meyer, Wiedemanns Annalen Bd. II, 1877, p. 387 ff.

Helmholtz nennt Λ gerade jenen Quotienten $\frac{k}{\lambda}$, sodass Λ einfach gleich einer Länge wird.

Was nun zunächst die nach der Ausflussmethode bestimmten Werthe k anlangt, so ist zu bemerken, dass dieselben etwas kleiner sind, als der Werth, den wir gefunden haben.

Berechnet man aus der von Helmholtz nach Poiseuille gegebenen Formel die Werthe von k für die Temperaturen 14°, 15° und 16°, so findet man:

$$k_{14} = 0{,}01174 \qquad k_{15} = 0{,}01143 \qquad k_{16} = 0{,}01114.$$

Der Werth für 15° unterscheidet sich von dem unsern um etwas weniger als 7 % des letztern.

Dagegen sind die meisten der nach andern Methoden bestimmten Werthe k noch grösser als der unsrige.

So findet Helmholtz aus den Beobachtungen von Piotrowski in unsern Einheiten

$$k = 0{,}01402 \quad \text{bei } 24{,}5°.$$

O. E. Meyer[1]) berechnet aus Beobachtungen mit oscillirender Scheibe $k = 0{,}0132$ für 15,5° Celsius.

Es erscheint hier der Erwähnung werth, dass der Betrag von k_1, wie wir ihn unter Annahme eines Haftens der Flüssigkeit an den Wandungen aus den Beobachtungen mit dem kleinsten Cylinder gefolgert haben, fast genau mit dem Poiseuilleschen Werthe übereinstimmt.

Für den Coefficienten λ der Gleitung liegen sehr wenige ältere Angaben vor.

Helmholtz war der erste, der aus den Piotrowskischen Beobachtungen den Schluss zog, dass bei der Bewegung von Wasser an vergoldeten Flächen

---

1) O. E. Meyer: Crelle's Journal Bd. 59, 1861, p. 229. Pogg. Annalen Bd. 113.

ein Haften der Flüssigkeit an der Wand nicht anzunehmen sei.

Wie aber der Werth k, der aus jenen Beobachtungen folgt, grösser ist als alle sonst gefundenen Werthe dieses Coefficienten, so übersteigt auch der Betrag der Gleitung denjenigen, den wir gefunden haben, bedeutend.

Zur Vergleichung bedient man sich hier bequem der Helmholtzschen Grösse $\Lambda = \frac{k}{\lambda}$.

Aus unsern Werthen für $\mathfrak{k}$ und λ folgt

$$\Lambda = 0{,}0409 \text{ cm},$$

während Helmholtz giebt:

$$\Lambda = 0{,}2353 \text{ cm}.$$

Dagegen stimmt unser Werth merkwürdig gut mit demjenigen, den Helmholtz aus einer Beobachtung von Girard folgert.

Girard fand die Ausflusszeit von $^1/_4$ Liter Wasser von $0^0{,}5$ durch eine Kupferröhre von 1,83 mm Durchmesser und 1790 mm Länge zu 624,5 Sekunden, wenn der Druck gleich dem einer Wasserhöhe von 100 mm war.

Helmholtz berechnet hieraus für Λ den Werth

$$\Lambda = 0{,}03984 \text{ cm}.$$

Hierzu muss bemerkt werden, dass in einer neueren Arbeit [1]) eine Gleitung von Wasser auch an Metall bestritten wird. Der Verfasser weist darauf hin, dass bei engen Röhren die Wassermenge, welche unter sonst gleichen Umständen ausfliesst, sehr beträchtlich grösser sein muss wenn Gleiten stattfindet, als wenn die Flüssigkeit an den Wandungen haftet. Er stellt dann Beobachtungen mit engen Glasröhren an, die er später

---

1) Dampier-Wetham: On the alleged Slipping etc. Lond. Proceedings Vol. 48, p. 225.

inwendig versilbert und weist nach, dass die Ausflussmenge sich nicht verändert hat.

Somit zeigt er, dass Wasser sich an Glas und Metall nicht verschieden verhält. Für Wasser an Glas ergeben aber Poiseuille's Beobachtungen unzweifelhaft ein Haften.

Indess ist hier doch wohl die Frage berechtigt, ob sich denn die Verhältnisse, die innerhalb solcher Röhren herrschen ohne Weiteres mit denen vergleichen lassen, die an der Wand unserer Cylinder vorliegen.

Einmal ist das Metall, an dem die Flüssigkeit sich bewegt, in beiden Fällen verschieden.

Zweitens aber erscheint es doch sehr fraglich, ob der Silberüberzug in den Röhren eine der polirten Goldoberfläche unserer Cylinder entsprechende Glätte und Gleichmässigkeit besessen hat. Es ist sogar wahrscheinlich, dass dies nicht der Fall war. Denn erfahrungsgemäss ist bei der Versilberung von Glas auf nassem Wege die freie Silberoberfläche ursprünglich vollkommen matt und wird erst durch Poliren blank und glänzend.

Wir müssen ferner an dieser Stelle kurz auf die oben erwähnte Arbeit von Couette eingehen, in welcher nach der hier geschilderten Methode die innere Reibung von Wasser und von Luft untersucht ist.

Wie schon bemerkt, eignen sich seine Messungen zur Berechnung absoluter Werthe für die Reibungsconstante nicht besonders.

Einmal war die Bestimmung des Drehmomentes, welches der innere Cylinder erfuhr, eine sehr rohe: es wurde durch das Gewicht bestimmt, welches nothwendig war um an bekanntem Hebelarm wirkend den Cylinder in seiner Ruhelage festzuhalten.

Allerdings ist dieser Nachtheil dadurch wieder ausgeglichen, dass die Radien der beiden Cylinder sehr

gross, ihre Differenz sehr klein genommen wurde (es war $r_1 = 14{,}393$ cm, $r_0 = 14{,}640$ cm) wodurch das Drehmoment einen sehr beträchtlichen Werth erhält. Andrerseits bedingt aber eine derartige Anordnung einen neuen, von Couette selbst hervorgehobenen Mangel: es erhalten kleine Fehler in der coaxialen Justirung der beiden Cylinder einen grossen Einfluss auf das Resultat. Die von Couette für excentrische Stellung entwickelte Näherungsformel zeigt, dass die Zunahme des Gesammtmomentes, ein und dieselbe absolute Excentricität beider Cylinder vorausgesetzt, indirect proportional ist dem Quadrat der Differenz der Cylinderradien.

Ferner dürfte die Art, wie ein Einfluss von Bodenflächen vermieden würde, theoretisch nicht ohne Bedenken sein und endlich wurde auf die bei der Couetteschen Versuchsanordnung nothwendig eintretende Reibung zwischen festen Theilen gar keine Rücksicht genommen.

Danach kann es kaum überraschen, wenn Couette einen bedeutend grössern Werth für die Reibungsconstante erhielt: er rechnet, da ihm nur ein Paar Cylinder zur Verfügung steht, von vornherein unter Annahme eines Haftens der Flüssigkeit an der Wand und findet $k = 0{,}01255$ für $16^0{,}5$, also einen noch etwas grössern Werth, als ihn unsere Beobachtungen unter Annahme des Gleitens liefern.

Die Arbeit will aber auch gar keine absolute Bestimmung der Reibungsconstante geben. Es handelt sich in ihr vielmehr um Untersuchung der Reynolds'schen Erscheinungen in anderer Form.

Reynolds[1]) hat bekanntlich für den Ausfluss von

1) O. Reynolds: An experimental Investigation etc. Lond. Proceedings No. 224, Vol. 35.

Wasser durch Röhren gezeigt, dass innerhalb ein und derselben Röhre je nach der Geschwindigkeit der Flüssigkeit zwei vollständig verschiedene Formen der Bewegung herrschen können.

Bei kleiner Geschwindigkeit ist die Bewegung „linear“ dann tritt bei einer, vom Durchmesser der Röhre und der Zähigkeit der Flüssigkeit abhängigen „kritischen“ Geschwindigkeit ein unstetiger Uebergang in eine andere „wellige“ Form der Bewegung ein. Dieses selbe Verhalten hat Couette bei seinem Cylinder gefunden. Bei kleinen Geschwindigkeiten war das Moment der Drehgeschwindigkeit proportional. Bei einer Geschwindigkeit von 55 Drehungen in der Minute trat unstetiges Wachsen des Momentes ein und für weiter gesteigerte Geschwindigkeiten war das Drehmoment der Geschwindigkeit nicht mehr proportional.

Die Differenz der Cylinderradien erreichte bei unsern Beobachtungen sehr viel beträchtlichere Werthe als bei Couette. Die Drehgeschwindigkeit stieg bei uns ferner bis auf 40 Drehungen in der Minute. Obwohl man nun nach Analogie der Reynolds'schen Versuche erwarten sollte, dass die kritische Geschwindigkeit mit zunehmender Differenz der Cylinderradien abnähme, konnte bei unsern Versuchen eine Erscheinung, wie sie Couette beobachtet hat, nicht wahrgenommen werden.

Eine weitere Arbeit von Unwin[1]), welcher eine niedrige Cylinderscheibe in einem bifilar aufgehängten Gefäss rotiren liess und den Ausschlag des letzteren mass, ist hier der Aehnlichkeit der Beobachtungsmethode wegen zu erwähnen. Da indessen die Unwin'sche

---

1) Unwin: On the Friction of Water etc. Lond. Proceedings Vol. 31, p. 54.

Versuchsanordnung sich einer strengen theoretischen Behandlung entzieht, so sind seine Resultate für unsere Zwecke nicht zu verwerthen.

Die Beobachtungen, die wir mit andern Flüssigkeiten als Wasser angestellt haben, und die in Tabelle II unter *E*, *F*, *G* enthalten sind, können in sofern noch nicht den Anspruch auf abschliessende Bedeutung erheben, als es nicht möglich war, bei ihnen die Werthe der Cylinderradien so zu variiren, dass die Frage ob Gleiten oder Haften anzunehmen ist, sich sicher beantworten liesse. Doch ist ein grösserer Betrag der Gleichung bei Alkohol durch die Piotrowskischen Beobachtungen unwahrscheinlich gemacht und noch weniger dürfte man geneigt sein, bei Glycerin und Olivenöl, welche schon den äussern Augenschein nach den Wandungen viel fester anhangen als Wasser oder Alkohol, der Gleitung einen nennenswerthen Betrag zuzuschreiben.

Damit stimmt gut überein, dass der relative Werth, den frühere Beobachter nach der Ausflussmethode für Alkohol im Vergleich mit Wasser gefunden haben, fast genau den nämlichen Werth für den Coefficienten k für Alkohol ergiebt, den man als Mittelwerth aus unsern Beobachtungen berechnet.

Setzt man den Reibungscoefficienten von Wasser gleich 100 so wird für Alkohol der Werth 119,5 angegeben. Legen wir nun für k und Wasser unsern Werth $k = 0{,}01228$ zu Grunde, so folgt für Alkohol $k = 0{,}01467$, während das Mittel aus unsern Beobachtungen giebt $k = 0{,}01459$.

Für Glycerin und Olivenöl habe ich keine Werthe zum Vergleich gefunden. Meine Beobachtungen geben im Mittel

1) für Glycerin $k = 2{,}3395$

2) für Olivenöl $k = 0{,}9890$.

Bemerkenswerth erscheint besonders, dass auch für die beiden letztgenannten zähen Flüssigkeiten unsere Beobachtungen eine Unabhängigkeit des Reibungscoefficienten von der Geschwindigkeit ergeben. Denn die Schwankungen, die k in der Tabelle zeigt, entsprechen durchaus noch der Grösse der Unsicherheit in den Ablesungen. Zwar ist bei diesen zähen Substanzen der Ausschlag ein sehr viel beträchtlicherer, als bei Wasser oder Alkohol, aber dafür sprechen sich auch die unvermeidlichen Ungleichmässigkeiten der Rotationsgeschwindigkeit in den sehr beträchtlich vergrösserten Schwankungen der Einstellung in verstärkter Weise aus. Die schwache Neigung aber, welche k in dem ersten Satze für Glycerin und dem Satze für Olivenöl zeigt, mit wachsender Geschwindigkeit etwas zuzunehmen, dürfte sich völlig aus den während der Beobachtungen herrschenden Temperaturverhältnissen erklären.

Bei beiden Sätzen nämlich hatte es sich zufällig so getroffen, dass während der Beobachtungen, die der geringeren Flüssigkeitshöhe entsprachen die Temperatur um etwa 0,4 Grad stieg, so dass die Ablesungen, die der kleineren Geschwindigkeit entsprachen, bei etwas niederer Temperatur gewonnen, also etwas zu gross ausgefallen sind. So musste sich in der That ein scheinbares geringes Wachsthum von k mit steigender Drehgeschwindigkeit ergeben.

Werfen wir zum Schluss einen Rückblick auf die gewonnenen Resultate, so können wir dieselben in folgende Sätze zusammenfassen:

1) Die Beobachtungen mit den concentrischen Kugeln bestätigen das von Elie gefundene Resultat, demzufolge die Versuche, nach der Kirchhoff'schen Formel berechnet, für k Werthe liefern, die zunehmen mit wachsender Drehgeschwindigkeit.

2) Dieses Verhalten ist indess auf das erwähnte Problem beschränkt. Die Cylindermethode, die im Gegensatz zu der erstgenannten, einer exacten theoretischen Behandlung zugängig ist, liefert für k konstante Werthe.

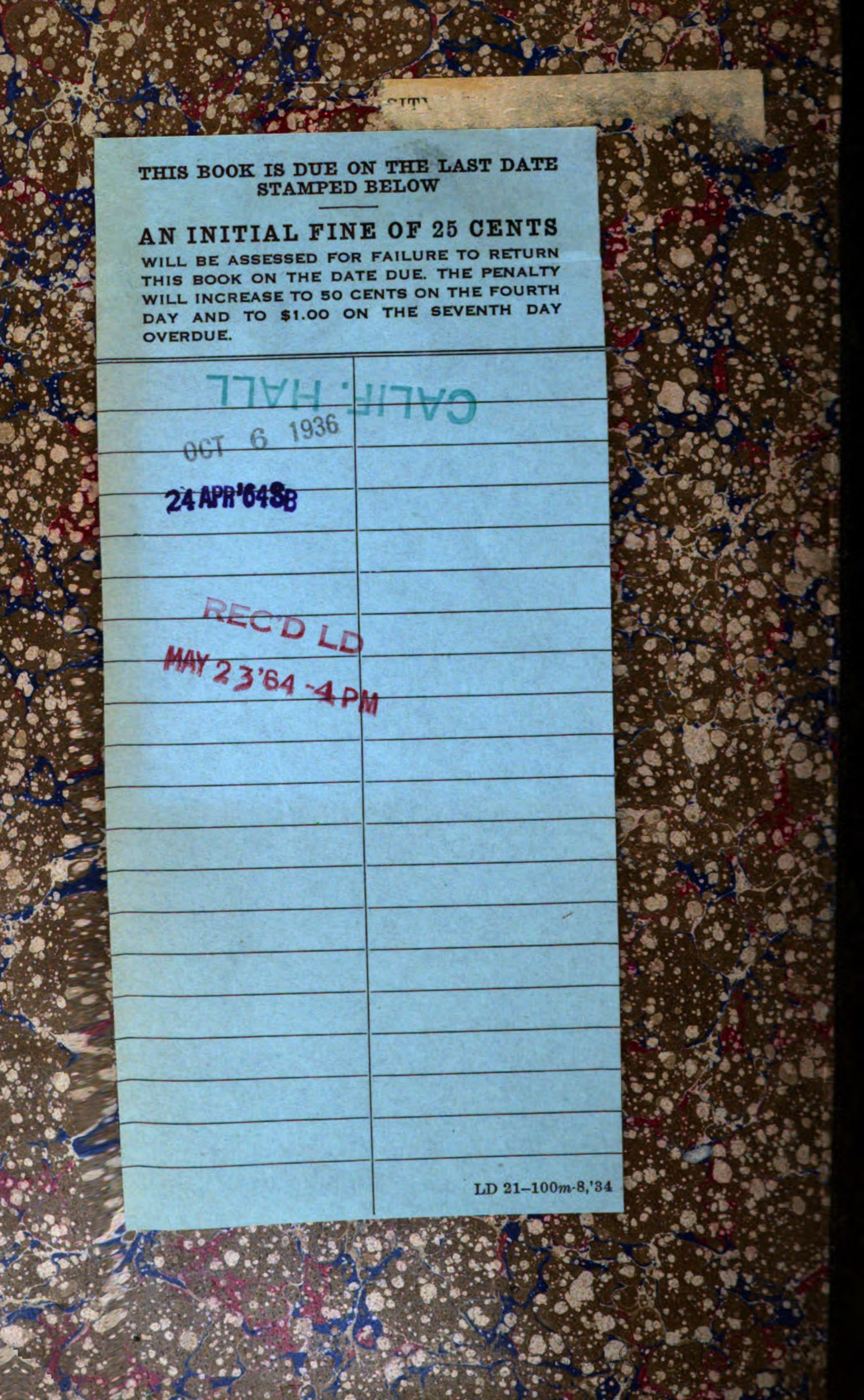
3) Hiernach scheint sich die Ansicht von Margules zu bestätigen, nach der die Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung in den Differentialgleichungen d. h. also der Produkte aus den Geschwindigkeiten und ihren Differentialquotienten nach den Coordinaten unter Umständen auch für geringe Geschwindigkeiten zu Resultaten führen kann, die mit der Beobachtung in unvereinbarem Widerspruch stehen.

4) Der nach der Cylindermethode gefundene Werth des Reibungscoefficienten ist dem Poiseuilleschen Werthe näher als die meisten der nach andern Methoden gefundenen. Die Beobachtungen bestätigen das von Helmholtz gefundene Resultat, dem zufolge Wasser an vergoldeten Flächen nicht haftet, sondern gleitet.

5) Auch für sehr zähe Flüssigkeiten ist die Methode der Cylinder gut brauchbar und liefert mit der Theorie übereinstimmend, constante Werthe für den Reibungscoefficienten.

Lebenslauf.

Der Verfasser, Carl Brodmann, ist geboren am 12. August 1864 zu Halberstadt. Er ist der Sohn des verstorbenen Appellationsgerichtsraths Brodmann.

Seine Schulbildung erhielt er auf dem Kgl. Domgymnasium zu Halberstadt, welches er Ostern 1882 mit dem Zeugniss der Reife verliess. Von Ostern 1882 bis Ostern 1885 studirte er in Freiburg, Berlin und Strassburg Medizin und Naturwissenschaften, von Ostern 1885 in Göttingen speciell Mathematik und Physik. Im August 1889 bestand er vor der Kgl. Wissenschaftlichen Prüfungscommission zu Göttingen das Examen für die Candidaten des höhern Schulamtes.

Seit dem 1. Januar 1890 ist er am physikalischen Institut der Technischen Hochschule zu Darmstadt als Assistent angestellt.